

## КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХІВ ТІЛ В ЦЕНТРАЛЬНОМУ ПОЛІ ЗІ ЗМІННИМ ПОТЕНЦІАЛОМ

І.О. Теплицький, С.О. Семеріков  
м. Кривий Ріг, Криворізький державний педагогічний університет  
ss@kpi.dp.ua

*Постановка проблеми.* Доцільність ознайомлення школярів з технологією комп'ютерного моделювання при вивченні фізики сьогодні вже не потребує спеціальної аргументації, скоріше актуальною є потреба в обговоренні змістового наповнення відповідного навчального курсу комп'ютерного моделювання. Нагадаємо лише провідну ідею: в тих випадках, коли експериментування з реальними об'єктами виявляється практично неприйнятним або принципово неможливим, експерименти проводять з математичними моделями цих об'єктів. Якщо в такій діяльності застосовують комп'ютер, то говорять про *комп'ютерне моделювання*, а відповідне дослідження називають *обчислювальним експериментом*.

Останні десять років автори регулярно публікують у педагогічних виданнях матеріали за цією тематикою ([4–8] та інші). Зокрема, в [7] йшлося про вивчення в умовах загальноосвітньої школи рухів тіл під дією сили всесвітнього тяжіння і досліджувалося питання про вигляд всіх можливих траєкторій. На ряді прикладів з поступовим ускладненням від простого випадку, коли маси тіла-супутника і центрального тіла є несумірними (рух штучного супутника навколо планети або рух планети навколо Сонця), до більш складного прикладу – руху системи тіл із сумірними масами (планета – природний супутник або компоненти системи «подвійна зірка») на основі обчислювального експерименту, який складав суть процесу дослідження, були отримані такі результати:

- розраховані й побудовані траєкторії відповідних рухів;
- доведена відповідність цих рухів законам Кеплера;
- показана необхідність переходу до системи відліку, пов'язаної зі спільним центром мас у випадках тіл із сумірними масами;
- проілюстрована «всесвітність» закону тяжіння.

Пропонований матеріал є логічним продовженням [7]. В ньому йдеться про узагальнення закону всесвітнього тяжіння на випадок довільного показника степеня  $k$  для відстані  $r$  між тілами:

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^k}. \quad (1)$$

Поставлену проблему можна сформулювати і так: як би рухалися тіла Сонячної системи, якби гравітаційна взаємодія відбувалася за законом (1) при довільному  $k$ ?

*Основною метою дослідження* поставимо питання про можливі значення  $k$  та про вигляд можливих траєкторій рухів.

Така постановка проблеми дослідження виходить далеко за межі шкільних курсів фізики й математики і фактично є об'єктом курсу теоретичної фізики (наприклад, [2, 48-49]). Тому дослідження комп'ютерних моделей є єдиним методом, що дозволяє усунути багато ускладнень, пов'язаних з обмеженим математичним апаратом школярів. Не претендуючи на повноту і вичерпність докладного теоретичного аналізу, обмежимося якісними результатами.

Основна частина. З урахуванням II закону Ньютона

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}, \quad (2)$$

спочатку розглянемо згаданий простий випадок, стосовно якого приймемо наступні припущення:

*Припущення 1.* Будемо вважати масу супутника набагато меншою за масу центрального тіла:  $m_{\text{супут}} \ll m_{\text{ц.т.}}$ . Це дозволить не розглядати рух центрального тіла: адже прискорення, що їх надають одне одному два тіла при взаємодії, обернено пропорційні їхнім масам.

*Припущення 2.* Будемо вважати, що відстань між центрами тіл значно перевищує їхні розміри, тобто вважатимемо тіла матеріальними точками. Це забезпечить прості умови застосовності закону всесвітнього тяжіння.

*Припущення 3.* Будемо нехтувати опором середовища, адже реально штучні супутники планет рухаються у надзвичайно розріджених шарах планетних атмосфер, а природні супутники – взагалі поза атмосферами.

*Припущення 4.* Будемо також нехтувати впливом інших тіл Сонячної системи на дані два тіла. У такому разі на тіло-супутник діятиме тільки одна сила.

Покажемо, як засобами чисельного аналізу можна розрахувати рух тіла-супутника навколо центрального тіла, тобто одержати уявлення про вигляд можливих траєкторій.

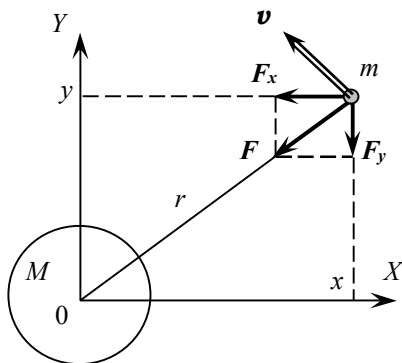


Рис. 1.

Нагадаємо, що рух супутника відбувається у площині, в якій лежать вектор  $\mathbf{v}$  швидкості супутника і центр планети. В цій самій площині лежить і вектор  $\mathbf{F}$  сили тяжіння. Опис такого руху здійснимо в прямокутній системі координат з початком у центральному тілі (рис. 1).

Тут  $F_x$  і  $F_y$  – складові вектора сили тяжіння  $\mathbf{F}$ ;  $M$ ,  $m$  – відповідно маси центрального тіла й супутника;  $\mathbf{v}$  – вектор орбітальної швидкості супутника.

Положення супутника визна-

чається двома координатами  $x, y$ ; при цьому знаки проекцій  $F_x$  і  $F_y$  протилежні знакам координат.

З подібності трикутників маємо:  $\frac{F_x}{|F|} = -\frac{x}{r}$ ,  $\frac{F_y}{|F|} = -\frac{y}{r}$ , що разом з (1)

дає

$$F_x = -GMm \cdot x/r^{(k+1)}; \quad F_y = -GMm \cdot y/r^{(k+1)}.$$

Для визначення проекцій прискорення скористаємось (2):

$$a_x = -GM \cdot x/r^{(k+1)}; \quad a_y = -GM \cdot y/r^{(k+1)}, \quad (3)$$

а відстань  $r$  між тілами визначатимемо за теоремою Піфагора:  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Тоді

$$a_x = GMx(x^2 + y^2)^{\frac{k+1}{2}}, \quad a_y = GM y(x^2 + y^2)^{\frac{k+1}{2}} \quad (4)$$

*Система рівнянь (4) є математичною моделлю руху тіла-супутника.*

Конкретизуємо задачу і дослідимо рух Землі навколо Сонця.

Учням відомо, що тіло стає супутником, якщо у початковий момент орбітального руху йому надати першої космічної швидкості  $v_k$ , значення якої звичайно знаходять за умови, що сила тяжіння забезпечує необхідне доцентрове (нормальне) прискорення:

$$G \frac{M \cdot m}{r^k} = \frac{mv^2}{r},$$

звідки

$$v_y(0) = v_k = \sqrt{GM / r^{(k-1)}}. \quad (5)$$

Нехай цей момент відповідає перетину орбіти супутника з віссю абсцис.

### **Обчислювальний експеримент**

Середовищем для моделювання залишимо електронні таблиці. Не повторюючи схему обчислень з [7], зазначимо тільки головне.

1. Обчислення координат  $x, y$  точок орбіти будемо виконувати за відомою циклічною схемою *прискорення*  $\rightarrow$  *швидкість*  $\rightarrow$  *координата*.

2. Для зберігання початкових значень змінних  $v_x(0), v_y(0), x(0)$  та  $y(0)$  виділяємо в таблиці окремі комірки, розташовані під умовою, причому значення  $v_y(0)$  обчислюватиметься автоматично за модифікованою формулою (5), яку необхідно буде створити у відповідній комірці.

Зазначимо вхідні дані та початкові умови для системи тіл Сонце–Земля:

$$M = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}, \quad m = 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}, \quad r = 1,5 \cdot 10^8 \text{ м}.$$

Крок збільшення часу  $\Delta t$  будемо добирати експериментально

Нехай у початковий момент часу ( $t = 0$ ) маємо:

$$x_1(0) = 0, \quad y_1(0) = 0, \quad x_2(0) = r, \quad y_2(0) = 0, \quad v_{1x}(0) = 0, \quad v_{2x}(0) = 0, \quad v_{1y}(0) = 0, \quad v_{2y}(0) = v_k.$$

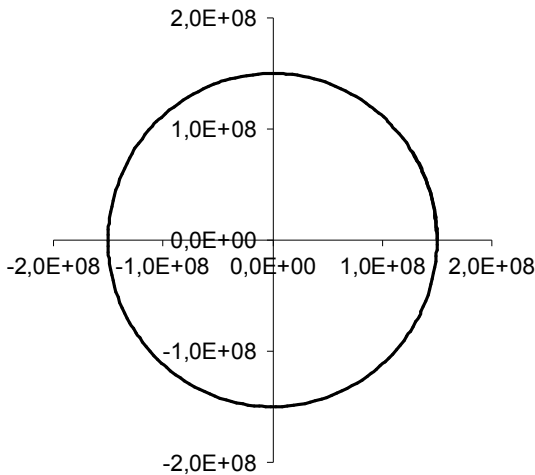
Тут індекси 1 відносяться до центрального тіла (Сонця), а індекси 2 – до тіла-супутника (Землі).

Ключові комірки цієї таблиці мають такий зміст:

комі- рка	формули / числа	примітки
H7	=2	значення $k$
H8	=0	
H9	=(H2*H4/H6^(H7-1))^0,5	$v_{1k}$ – перша космічна
H10	=H6	
H11	=0	копіювати в A3 і A4 копіювати в B3 і B4
A2	=\$H\$2*\$H\$4*E2/((КОРЕНЬ((E2)^2+(F2)^2))^(H\$7+1))	
B2	=\$H\$2*\$H\$4*F2/((КОРЕНЬ((E2)^2+(F2)^2))^(H\$7+1))	копіювати в E4 копіювати в F4
C2	=\$H\$7	
D2	=\$H\$8	
E2	=\$H\$9	
F2	=\$H\$10	
C3	=C2+A2*\$H\$3*0,5	
D3	=D2+B2*\$H\$3*0,5	
E3	=E2+C3*\$H\$3	
F3	=F2+D3*\$H\$3	
C4	=C3+A3*\$H\$3	
D4	=D3+B3*\$H\$3	

*Порядок роботи.*

- Заповнити комірки H2–H7.
- Заповнити комірки згідно наведеної вище таблиці.
- Всі формули 4-го рядка (від A4 по F4) копіювати у наступні 200 рядків.
- Маючи заповнену таблицю, будуюмо графік за даними стовпців E та F.



	A	B	C	D	E	F	G	H
<b>1</b>	$a_{2x}$	$a_{2y}$	$v_{2x}$	$v_{2y}$	$x_2$	$y_2$	<i>Дано:</i>	
<b>2</b>	-5931	0	0	943186	1,50E+08	0,00E+00	$G =$	6,67E-11

	A	B	C	D	E	F	G	H
3	-5927	-205	-16309	943186	1,50E+08	5,19E+06	$\Delta t = 5,5$	
4	-5916	-410	-48908	942058	1,50E+08	1,04E+07	$m_1 = 2,0E+30$	
5	-5899	-614	-81449	939803	1,49E+08	1,55E+07	$m_2 = 6,0E+24$	
6	-5874	-818	-113892	936424	1,49E+08	2,07E+07	$r = 1,5E+08$	
7	-5842	-1021	-146199	931926	1,48E+08	2,58E+07	$k = 2,0$	
8	-5803	-1222	-178331	926312	1,47E+08	3,09E+07	$v_{2x}(0) = 0$	
9	-5758	-1422	-210249	919591	1,46E+08	3,60E+07	$v_{2y}(0) = 9,43E+05$	
10	-5705	-1620	-241916	911770	1,44E+08	4,10E+07	$x_2(0) = 1,5E+08$	
11	-5645	-1817	-273293	902859	1,43E+08	4,59E+07	$y_2(0) = 0$	
...	...	...	...	...	...	...		

Рис. 2.

Враховуючи, що в досліджуваній моделі формули для прискорень  $a_x$  і  $a_y$  та для першої космічної швидкості  $v_{1k}$  модифіковані, маємо розглядати рис. 2 як тест на перевірку нових формул при звичайному значенні  $k = 2,0$ .

Поклавши  $k = 1,5$  і  $\Delta t = 0,05$  с, отримуємо схожий результат.

Можна переконалися в тому, що *формально коло траєкторія існує для будь-яких значень k*. Зокрема, при  $k = 1$  слід було б узяти  $\Delta t \approx 0,0005$  с, а при  $k = 2,2$   $\Delta t \approx 50$  і т.д. Висновок про існування колових траєкторій є дійсно формальним: якщо простежити за тим, яких значень набуває  $v_{1k}$  в описаних експериментах (комірка Н7), то виявляється, що в міру зменшення  $k$  відбувається швидке зростання орбітальної швидкості аж до  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с і більше, а це принципово неможливо. Таким чином, модель перестає адекватно описувати досліджуване явище. Такі занадто великі значення  $v_{1k}$  ми повинні сприймати всього лише як результати обчислень за наведеною формулою і ні в якому разі не приписувати об'єкту властивості неадекватної моделі.

Знов виконаємо тестування. Показник степеня залишимо з попереднім значенням  $k = 2$ , проте збільшимо орбітальну швидкість тіла-супутника  $v_{y2}(0)$  так, щоб задовольнялась умова замкнутої траєкторії  $v_{1k} < v_y(0) < \sqrt{2} v_{1k}$ . Орбіта має набути еліптичної форми. Нагадаємо, що тут  $v_{1k} = \sqrt{2} v_{1k}$  – друга космічна швидкість. То ж збільшимо попереднє значення  $v_y(0)$ , наприклад, в 1,25 рази. Для цього відредагуємо формулу в комірці Н9. А саме:

$$=(H2*H4/H6^{(H7-1)})^{0,5*1,25}. \quad (6)$$

Результат показано на рис. 3.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$a_{2x}$	$a_{2y}$	$v_{2x}$	$v_{2y}$	$x_2$	$y_2$	<i>Дано:</i>	
2	-5931	0	0	1178983	1,50E+08	0,00E+00	$G = 6,672E-11$	
3	-5806	-920	-59307	1178983	1,49E+08	2,36E+07	$\Delta t = 20$	
4	-5451	-1755	-175418	1160585	1,45E+08	4,68E+07	$m_1 = 2,00E+30$	
5	-4920	-2442	-284431	1125480	1,40E+08	6,93E+07	$m_2 = 6,00E+24$	
6	-4283	-2948	-382824	1076641	1,32E+08	9,08E+07	$r = 1,50E+08$	
7	-3609	-3273	-468482	1017680	1,23E+08	1,11E+08	$k = 2,00$	

	A	B	C	D	E	F	G	H
8	-2951	-3438	-540652	952223	1,12E+08	1,30E+08	$v_{2x}(0)=0$	
9	-2345	-3475	-599664	883468	9,98E+07	1,48E+08	$v_{2y}(0)=1,18E+06$	
10	-1809	-3419	-646555	813966	8,69E+07	1,64E+08	$x_2(0)=1,500E+08$	
11	-1349	-3300	-682729	745585	7,32E+07	1,79E+08	$y_2(0)=0$	
...	...	...	...	...	...	...		

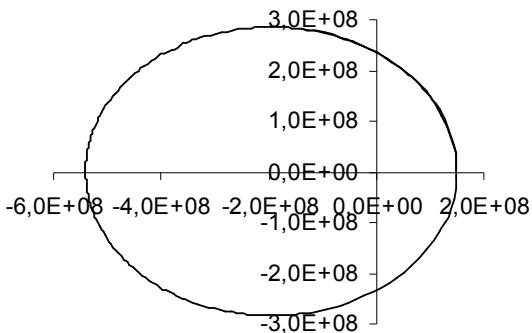
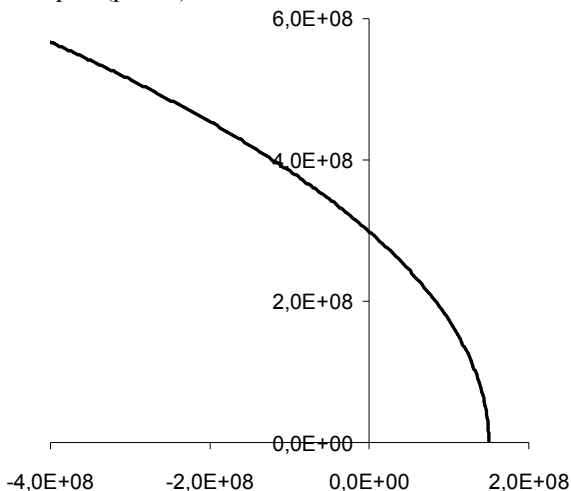


Рис. 3.

Якщо початковій швидкості надати значення  $v_y(0) = \sqrt{2} v_{1k}$ , тобто ввести до Н9 нового множника  $=(H2*H4/H6^{(H7-1)})^{0,5*2^{0,5}}$ , одержуємо параболічну траєкторію (рис. 4).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$a_{2x}$	$a_{2y}$	$v_{2x}$	$v_{2y}$	$x_2$	$y_2$	Дано:	
2	-5931	0	0	1330000	1,50E+08	0,00E+00	$G =$	6,672E-11
3	-5919	-263	-14827	1330000	1,50E+08	6,67E+06	$\Delta t =$	5

	A	B	C	D	E	F	G	H
4	-5884	-523	-44422	1328687	1,50E+08	1,33E+07	$m_1 =$	2,00E+30
5	-5827	-777	-73844	1326075	1,49E+08	2,00E+07	$m_2 =$	6,00E+24
6	-5749	-1025	-102981	1322187	1,49E+08	2,66E+07	$r =$	1,50E+08
7	-5650	-1263	-131725	1317062	1,48E+08	3,32E+07	$k =$	2,00
8	-5533	-1490	-159975	1310747	1,47E+08	3,98E+07	$v_{2x}(0) =$	0
9	-5398	-1703	-187638	1303299	1,46E+08	4,63E+07	$v_{2y}(0) =$	1,33E+06
10	-5249	-1902	-214631	1294784	1,45E+08	5,28E+07	$x_2(0) =$	1,500E+08
11	-5087	-2086	-240877	1285275	1,44E+08	5,93E+07	$y_2(0) =$	0
12	-4915	-2253	-266314	1274847	1,43E+08	6,57E+07		
...	...	...	...	...	...	...		

Рис. 4.

Отже, можна вважати, що модель з модифікованими формулами (1), (4), (5) пройшла тестування, оскільки зазначені формули при  $k = 2$  приводять до відомих заздалегідь результатів.

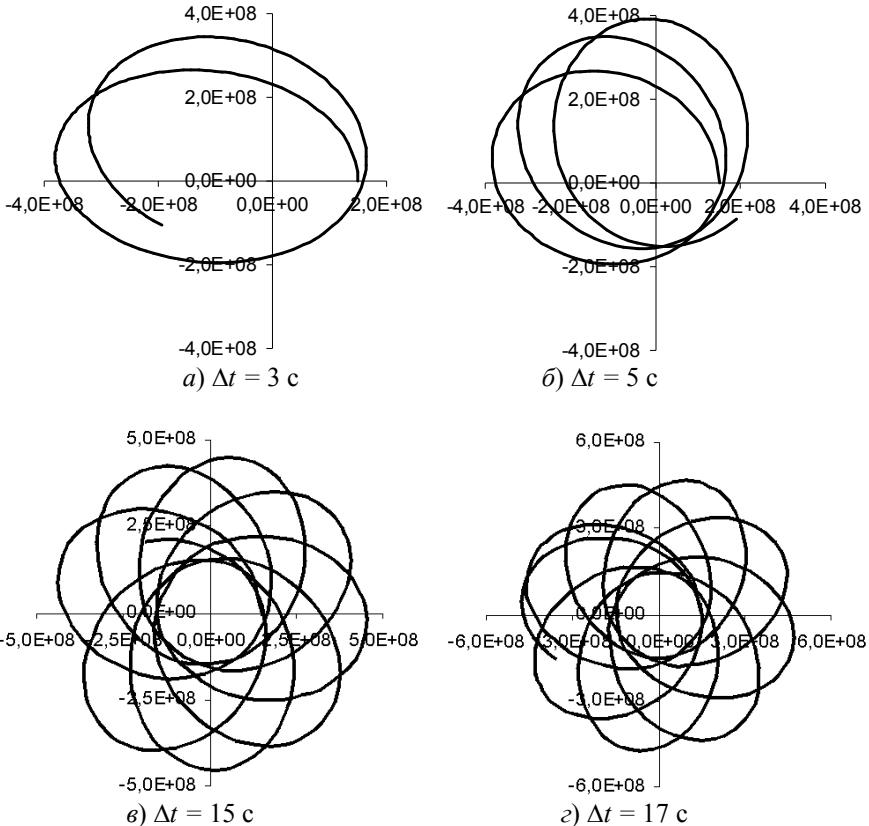


Рис. 5.

Перейдемо, нарешті, до експериментів з  $k < 2$ .

Нехай  $k = 1,8$ ,  $v_y(0) = 1,25v_{yk}$  у відповідності до (8) і  $\Delta t = 3$  с.

Результати моделювання на рис. 5 ( $a - z$ ).

Рис. 5а показує, що тіло-спутник, виконавши один оберт уздовж еліпса, не потрапляє у початкову точку, оскільки велика вісь еліпса за цей час повертається на деякий кут  $\Delta\varphi$  відносно центрального тіла (точки  $0; 0$ ).

Саме за такими траєкторіями мали б рухатись планети навколо Сонця або штучні супутники навколо планет.

Обговорюване питання розглядається в курсі теоретичної фізики [2, 48-49]. Зокрема зазначається, що кут  $\Delta\varphi$  завжди монотонно змінюється з часом і ніколи не міняє знак.

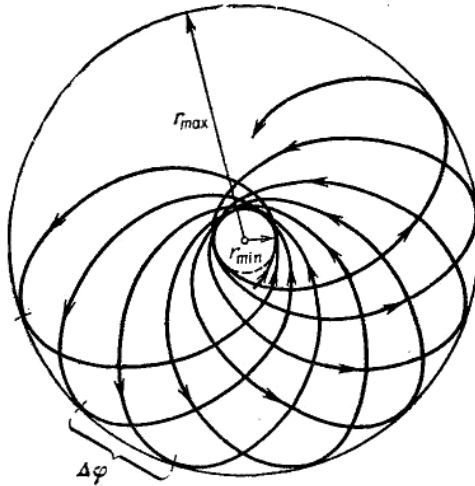


Рис. 6

Якщо область допустимої зміни  $r$  обмежена лише однією умовою  $r \geq r_{max}$  то траєкторія приходить із нескінченості і йде на нескінченість.

Якщо область зміни  $r$  має дві границі  $r_{min}$  і  $r_{max}$ , то траєкторія цілком лежить всередині кільця, обмеженого колами  $r = r_{max}$  і  $r = r_{min}$  (рухи вздовж таких траєкторій називають фінітними). Це, однак, не означає, що траєкторія неодмінно є замкнутою кривою. За час, протягом якого  $r$  змінюється від  $r_{max}$  до  $r_{min}$  і потім знову до  $r_{max}$ , радіус-вектор повернеться на кут  $\Delta\varphi$ .

Умова замкнутості траєкторії полягає в тому, щоб цей кут дорівнював раціональній частині від  $2\pi$ , тобто мав вигляд  $\Delta\varphi = 2\pi m / n$ , де  $m, n$  – цілі числа. Тоді через  $n$  повторень цього періоду часу радіус-вектор точки, виконавши  $m$  повних обертів, співпаде зі своїм початковим значенням, тобто траєкторія замкнеться.

Однак такі випадки виняткові, і при довільному значенні кут  $\Delta\varphi$  не є раціональною частиною від  $2\pi$ . Тому в загальному випадку траєкторія фіні-



тного руху не замкнута. Вона нескінчену кількість разів проходить через мінімальну і максимальну відстань (як, наприклад, на рис. 6) і за нескінченний час заповнює все кільце між двома граничними колами.

Існують лише два типи центральних полів, у яких всі траєкторії фінітних рухів замкнені. Це поля, в яких потенціальна енергія частинки пропорційна  $1/r$  або  $r^2$ . Перший з цих випадків відповідає  $k = 2$  (світ, у якому ми живемо).

### **Висновки**

1. Багато задач про рухи тіл під дією *змінних* сил можуть бути розв'язані наближено з достатньо високою точністю за допомогою чисельного аналізу, коли застосування аналітичних методів виявляється з різних причин неможливим. Саме тому автори факультативних курсів фізики (наприклад, [1, 81–90]) вважають доцільним ознайомлення школярів з основами чисельного аналізу.

2. Постановка проблеми дослідження виходить за межі шкільних курсів фізики й математики і фактично є об'єктом курсу теоретичної фізики. Тому дослідження комп'ютерних моделей виявляється єдиним методом, що дозволяє усунути багато ускладнень, пов'язаних з обмеженим математичним апаратом школярів.

### Література:

1. Кабардин О.Ф. и др. Факультативный курс физики, 8 кл.: Пособие для учащихся. – М.: Просвещение, 1973. – 206 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. – В 10-ти т.: Т. 1. Механика. – 4-е изд., испр. – М.: Наука, 1988. – 216 с.
3. Соловійов В.М., Семеріков С.О., Теплицький І.О. Інструментальне забезпечення курсу комп'ютерного моделювання // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2000. – №2. – С. 28–32.
4. Теплицький І.О. Елементи комп'ютерного моделювання: Навч. посібник. – Кривий Ріг: КДПУ, 2005. – 208 с.
5. Теплицький І.О., Семеріков С.О. Факультативний курс “Основи комп'ютерного моделювання” // Зб. наук. праць Кам'янець-Подільського держ. пед. ун-ту: Серія педагогічна. Вип. 8: Дидактики дисциплін фізико-математичної та технологічної освітніх галузей. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський держ. пед. ун-т, інформаційно-видавничий відділ, 2002. – С. 210-217.
6. Теплицький І.О., Семеріков С.О. Методика ознайомлення школярів з поняттям фазового простору в курсі фізики // Зб. наук. праць Кам'янець-Подільського держ. ун-ту: Серія педагогічна. Вип. 9: Методологічні принципи формування фізичних знань учнів і професійних якостей майбутніх учителів фізики та астрономії. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський держ. ун-т, інформаційно-видавничий відділ,

2003. – С. 163-165.

7. Теплицький І.О., Семеріков С.О. Комп'ютерне моделювання руху тіл під дією сили всесвітнього тяжіння // Зб. наук. праць Кам'янець-Подільського держ. ун-ту: Серія педагогічна. Випуск 10: Дидактики дисциплін фізико-математичної та технологічної освітніх галузей. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський державний університет, інформаційно-видавничий відділ, 2004. – С. 166-172.
8. Теплицький І.О., Семеріков С.О. Задача про політ паперового літачка // Зб. наук. праць Кам'янець-Подільського держ. ун-ту: Серія педагогічна. Випуск 11: Дидактика фізики в контексті орієнтирів Болонського процесу. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський державний університет, інформаційно-видавничий відділ, 2005. – С. 264-272.
9. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. – М.: Мир, 1967. – Т. 1. – 267 с.
10. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями. – М.: Мир, 1969. – 624 с.