

Міністерство освіти та науки України
КРИВОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
кафедра електромеханіки



КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни «Математичні моделі та програмні засоби розв'язання комплекс-
них практичних задач електротехніки та електромеханіки»
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

Галузь знань: G «Інженерія, виробництво та будівництво»

Спеціальність: G3 «Електрична інженерія»

м. Кривий Ріг – 2025 рік

Укладач:

д-р. техн. наук, професор, професор кафедри електромеханіки В. Титюк

Відповідальний за випуск:

д-р. техн. наук, професор, зав. кафедри електромеханіки С. Толмачов

Рецензент:

канд. техн. наук, доцент кафедри електромеханіки М. Барановська

Конспект лекцій з дисципліни «Математичні моделі та програмні засоби розв’язання комплексних практичних задач електротехніки та електромеханіки» присвячений вивченню методів математичного моделювання електромеханічних систем та систем електроприводу з використанням електронно-обчислювальних машин (ЕОМ). Розглядаються теоретичні та практичні аспекти моделювання при аналізі і синтезі автоматизованих електромеханічних систем, з особливою увагою до початкових етапів моделювання, вибору моделей та їх підготовки до обчислень.

Особлива увага приділена математичному опису систем, принципам створення моделей та використанню сучасних пакетів прикладних програм, таких як Mathcad, Matlab і Simulink, з демонстрацією їх можливостей та обмежень. Конспект містить приклади розрахунків параметрів моделей та результати моделювання, що сприяють засвоєнню практичних навичок. Матеріал є основою для подальшого поглибленого вивчення методів імітаційного моделювання та планування експериментів при моделюванні електромеханічних систем.

Розглянуто
на засіданні кафедри
електромеханіки
Протокол №1 від 29.08.2025 р.

Схвалено
на вченій раді
електротехнічного факультету
Протокол № 1 від 29.08.2025 р.

Зміст

Передмова	6
Тема 1. Загальні визначення та терміни.....	6
1.1 Визначення поняття моделі. Співвідношення між моделлю та об'єктом	6
1.2 Вимоги до моделі. Функції моделі	7
1.3 Класифікація моделей.....	8
Тема 2. Математичне моделювання базових елементів електротехнічних систем	10
2.1 Активні елементи елементи принципів схем (джерела напруги й струму).....	11
2.2 Ідеальні пасивні елементи принципів схем	12
2.3 Реальні пасивні елементи принципів схем та їх моделі	14
2.3.1 Реальний резистор.....	14
2.3.2 Реальний електричний конденсатор.....	16
2.3.3 Реальна індуктивність.....	17
Тема 3. Математичне моделювання напівпровідникових елементів	19
3.1 Модель напівпровідникового діода.....	19
3.2 Стабілітрони	22
3.3 Варикапи	23
3.3 Тунельний діод.....	23
3.4 Зворотній діод.....	24
3.5 Фотодіод.....	25
3.6 Світлодіод	25
3.7 Фоторезистор.....	26
3.8 Тиристори	26
3.9. Біполярний транзистор.....	28
3.10 Польовий МДН-транзистор.....	30
Тема 4. Математичне моделювання електричних машин постійного струму	31
4.1 Конструкція машини постійного струму	31
4.2 Принцип дії машин постійного струму.....	32
4.2 Теоретична математична модель машини постійного струму.....	35
4.2.1 Загальні положення та допущення	35
4.2.2 Система диференціальних рівнянь двигуна постійного струму	36
4.2.3 Структурна схема ДПС незалежного збудження	37
4.3 Математичні моделі ДПС при зміні магнітного потоку.....	38
4.3.1. Двигун постійного струму з послідовним збудженням.....	38

4.3.2. Двигун постійного струму зі змішаним збудженням	39
4.3.3. Двигун постійного струму з урахуванням реакції якоря.....	39
4.3.4 Моделювання ДПС при регулюванні магнітного потоку	40
4.4. Математичне моделювання генераторів постійного струму	41
4.5 Приклади реалізації математичних моделей ДПС.....	42
4.5.1 Прогнозування параметрів ДПС за каталожними даними.....	42
4.5.2 Реалізація математичної моделі двигуна постійного струму у MATLAB®.....	44
4.5.3.1 Реалізація математичної моделі двигуна постійного струму на m-мові програмування з використанням технології live script	44
4.5.3.2 Реалізація математичної моделі двигуна постійного струму, наданої у формі простору станів	46
4.5.3.3 Реалізація математичної моделі двигуна постійного струму візуальними засобами MATLAB®/Simulink	47
4.5.3.4 Реалізація мультифізичної математичної моделі двигуна постійного струму засобами MATLAB®/Simulink/SimPower	49
4.5.4 Реалізація математичної моделі двигуна постійного струму послідовного збудження у MATLAB®	51
Тема 5. Лінеаризована математична модель асинхронного двигуна	52
5.1 Розрахунок параметрів асинхронного двигуна за даними каталогу	52
5.2 Механічна характеристика асинхронного двигуна і її апроксимація видозміненою формулою Клосса.....	54
5.3 Лінеаризована модель асинхронного двигуна.....	56
Тема 6. Математичне моделювання тиристорних перетворювачів.....	57
6.1 Методи моделювання тиристорних перетворювачів.....	57
6.2 Моделювання тиристорних перетворювачів за середніми значеннями випрямленої ЕРС.....	58
6.3 Моделювання з врахуванням однонаправленості вентильного кола	60
6.4 Моделювання тиристорних перетворювачів за миттєвими значеннями випрямленої ЕРС.....	60
6.5. Моделювання тиристорних перетворювачів методом переключаючих функцій	62
Тема 7. Рівняння динамічних об'єктів у формі простору станів	65
7.1. Уявлення про простір станів	65
7.2 Взаимосвязь видов математических моделей двигателя постоянного тока	76
Тема 8. Моделювання нелінійностей електромеханічних систем.....	79
8.1. Основні нелінійності електромеханічних систем	79
8.1.1 Нелінійність типу «Насичення».....	80
8.1.2 Нелінійність типу "Ідеальне реле"	81
8.1.3 Нелінійність типу "Зона нечутливості"	82

8.1.4 Нелінійність типу «реальне реле» або «реле з зоною нечутливості».....	84
8.1.5 Нелінійність типу «прямокутна петля гістерезиса».....	84
8.1.6 Нелінійність типу «люфт».....	85
8.2 Неаналітичні нелінійності	86
8.3 Математичне моделювання моменту опору робочої машини	88
Список рекомендованої літератури.....	93

Передмова

Моделювання на ЕОМ у даний час перетворилося в одну з методологічних основ дослідження складних систем керування. Особливо значна його роль у тих випадках, коли технологічний процес або об'єкт управляється за допомогою ЕОМ. У зв'язку з цим вивчення методів та проведення математичного моделювання електромеханічних систем і систем електроприводу є важливою складовою у підготовці інженерів-електромеханіків.

Висвітлюються питання теорії і практики застосування моделювання при аналізі і синтезі автоматизованих електромеханічних систем. Основна увага приділяється викладенню питань, пов'язаних із початковими етапами моделювання, вибору моделі та її підготовки до рішення на ЕОМ. Такий підхід при викладанні матеріалу обумовлений тим, що в даний час «інструментальна база» моделювання - пакети прикладних програм, які застосовуються у вузах надзвичайно широка і орієнтація на ту або іншу розробку істотно звужує узагальненість викладання матеріалу. З іншого боку, поява таких інструментів моделювання, як пакет Matlab, висуває на перший план знання не способів (алгоритмів) реалізації того або іншого методу, а його можливостей і обмежень. Враховуючи це, автори надають більшу увагу математичному опису електромеханічних систем та принципам створення моделей.

Матеріал, поданий у конспекті, охоплює далеко не всі аспекти проблеми моделювання. Так, безсумнівно, заслуговують більш докладного викладу методи імітаційного моделювання та питання планування й обробки результатів експериментів при моделюванні і т.д.

Матеріал, що викладається, супроводжується достатньою кількістю прикладів, які ілюструють методику розрахунку параметрів розглянутих моделей. Приведено також результати моделювання при застосуванні пакетів Mathcad і Matlab з розширенням Simulink.

Тема 1. Загальні визначення та терміни

1.1 Визначення поняття моделі. Співвідношення між моделлю та об'єктом

Модель - це представлення об'єкта, системи або поняття в деякій формі, відмінній від реального існування. Модель є засобом, що допомагає в поясненні, розумінні або удосконалюванні системи. Модель може бути точною копією об'єкта (хоча й в іншому масштабі і з іншого матеріалу) або відображати деякі характерні властивості об'єкта в абстрактній формі. Тому модель - це інструмент для прогнозування наслідків при дії вхідних сигналів на об'єкт, який підвищує ефективність суджень і інтуїції фахівців.

Всі моделі - спрощені уявлення реального світу або абстракції. Звичайно відкидають велику частину реальних характеристик досліджуваного об'єкта і вибирають ті його особливості, що ідеалізують варіант реальної події.

Подібність моделі з об'єктом характеризується ступенем ізоморфізму. Для того щоб бути цілком ізоморфною, модель повинна задовольняти дві умови: по-перше, повинна існувати взаємно однозначна відповідність між елементами моделі й елементами, що представляють об'єкт; по-друге, повинні бути збережені точні співвідношення (взаємодії) між елементами.

Більшість моделей лише гомоморфні, тобто подібні за формою. Причому є лише поверхнева подоба між різними групами елементів моделі й об'єкта. Гомоморфні моделі - результат спрощення й абстракції.

Для розробки гомоморфної моделі систему, звичайно, розбивають на більш дрібні частини, щоб легше було зробити необхідний аналіз. Але слід при цьому знайти складові частини, що не залежать у першому наближенні один від одного. З такого роду аналізом пов'язаний процес спрощення реальної системи (зневажання несуттєвими деталями, прийняття допущення про більш прості співвідношення). Наприклад, допускаємо, що між змінними є лінійна залежність або що резистори і конденсатори не змінюють своїх параметрів. При керуванні

часто допускають, що процеси або детерміновані, або їхнє поведіння описується відомими імовірнісними функціями розподілу.

Абстракція зосереджує в собі істотні риси поведінки об'єкта, але необов'язково в тій же формі і настільки детально, як в об'єкті. Більшість моделей - абстракція.

Після аналізу частин системи здійснюють їхній синтез, що повинно робитися дуже коректно, з урахуванням усіх їхніх взаємозв'язків. Основою успішної методики моделювання повинно бути ретельне відпрацювання моделі. Почавши з простої моделі, звичайно просуваються до більш досконалої її форми, яка віддзеркалює систему значно точніше. Між процесом модифікації моделі і процесом обробки даних є безперервна взаємодія.

Процес моделювання полягає в наступному: загальна задача дослідження системи розділяється на ряд більш простих; чітко формулюються цілі моделювання; підшукується аналогія; розглядається спеціальний чисельний приклад, що відповідає даній задачі; вибираються певні позначення; записуються очевидні співвідношення. Якщо отримана модель піддається математичному опису, її розширюють, у противному випадку - спрощують.

Ось чому конструювання моделі не зводиться до одного базового варіанта. Увесь час виникають нові задачі з метою покращення відповідності моделі й об'єкта.

1.2 Вимоги до моделі. Функції моделі

Найбільш загальні вимоги до моделі можуть бути сформульовані таким чином: модель повинна бути простою і зрозумілою користувачу, цілеспрямованою, гарантованою від абсурдних результатів, зручною в керуванні і спілкуванні, повною з погляду розв'язання головних завдань, адаптивною, що дозволяє легко переходити до інших модифікацій або оновлювати дані, дозволяти поступові зміни, тобто, будучи спочатку простою, вона може у взаємодії з користувачем ставати усе складнішою.

Ідея уявлення системи за допомогою моделі носить настільки загальний характер, що дати повну класифікацію усіх функцій моделі важко. Розглянемо п'ять випадків, що найбільш поширені як вихідний матеріал для визначення функцій моделі.

Моделі можуть допомогти нам упорядкувати нечіткі або суперечливі поняття. Наприклад, представивши роботи з проектування складних систем у вигляді мережного графіка, можна вирішити, які кроки й у якій послідовності необхідно починати. Модель дозволяє з'ясувати взаємозалежності, тимчасові співвідношення, необхідні ресурси й ін.

Усі мови, в основі яких лежить слово, будуть неточними, коли справа доходить до складних понять і описів. Правильно побудовані моделі дозволяють усунути ці неточності, надаючи в наше розпорядження більш успішні способи спілкування. Перевага моделі перед словесними описами - у стислості і точності уявлення заданої ситуації.

Моделі часто застосовуються як чудовий засіб навчання осіб, які повинні вміти справлятися з усілякими випадками поведінки систем, включаючи виникнення критичних ситуацій (моделі космічних кораблів, тренажери для навчання водіїв і ін.). Одним із важливих застосувань моделей є прогнозування поведінки об'єктів, що моделюються. Наприклад, будувати надзвуковий реактивний літак для проведення експериментів економічно недоцільно, а для завбачення його льотних характеристик використовують засоби моделювання (наприклад, випробування конструкцій в аеродинамічній трубі).

Моделі дозволяють робити контрольовані експерименти в ситуаціях, де експериментування на реальних об'єктах економічно недоцільно або практично неможливо. Звичайно, варіюють кілька параметрів системи, підтримуючи інші незмінними, і спостерігають результати експерименту. Часто, моделюючи систему, можна довідатися значно більше про її внутрішні взаємозв'язки, ніж оперуючи з реальною системою. Це стає можливим тому, що ми можемо контролювати поведінку моделі, легко змінювати її структуру та параметри.

Таким чином, модель може служити для досягнення двох цілей: описової, якщо модель служить для пояснення і кращого розуміння об'єкта, і керівної, коли модель дозволяє передбачити або відтворити характеристики об'єкта, що визначають її поведінку. Модель керівного типу, що наказує, може бути описовою, але не навпаки. Тому й різний ступінь корисності моделей, що застосовують в техніці й у соціальних науках. Це значною мірою залежить від методів і засобів, що використовувалися при побудові моделей, і в розходженні кінцевих цілей, що при цьому ставилися. У техніці моделі служать як допоміжні засоби для створення нових або більш досконалих систем. А в соціальних науках моделі пояснюють існуючі системи. Модель, придатна для розробки системи, повинна також пояснювати її.

1.3 Класифікація моделей

Моделі можна класифікувати різними способами, але жоден із них не є вичерпним. Значимо деякі типові групи моделей, що можуть бути покладені в основу системи класифікації: статистичні і динамічні; стохастичні і детерміновані; дискретні і неперевні; натурні, аналогові, символічні. Зручно представити моделі у вигляді безперервного спектра (рис.1.1). Фізичні моделі часто називають натурними, тому що зовні вони нагадують досліджувану систему. Вони можуть бути в зменшеному масштабі (модель сонячної системи) або в збільшеному (модель атома), тоді вони називаються масштабуючі моделі.

Аналогові моделі - це моделі, у яких властивість реального об'єкта представлена іншою властивістю, аналогічного по поведінці об'єкта. Аналогова ОМ, у якій зміна напруги може відображати зміну будь-якої фізичної величини у деякій системі, являє приклад подібної моделі. Графік подає аналогову модель іншого типу. Тут відстань відображає характеристики об'єкта. Графік показує співвідношення між різними кількісними характеристиками і може прогнозувати, як будуть змінюватися одні величини при зміні інших.

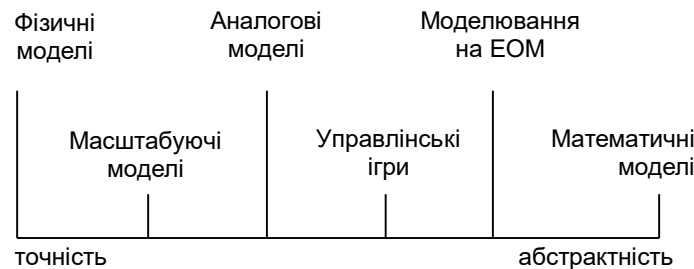


Рисунок 1 – Уявлення про спектр моделей.

Графічні вирішення можливі також для визначення ігрових задач, що іноді використовуються разом із математичними моделями, причому одна з цих моделей подає інформацію для іншої. Різного роду схеми також є аналоговими моделями (структурна схема якоїсь організації).

У тих випадках, коли у взаємодію вступають люди і машинні компоненти, моделювання називають іграми (управлінськими, військовими й ін.).

До математичних моделей відносяться ті, у яких для представлення процесу використовують символи, а не фізичні властивості. Математичні моделі - сукупність математичних об'єктів і відношень між ними, що адекватно відображає деякі властивості об'єкта.

Розглянемо більш докладно класифікацію математичних моделей. Класифікація відбувається за кількома принципами.

Залежно від характеру відображуваних властивостей об'єкта - функціональні і структурні. Функціональні відображають процеси функціонування об'єкта. Вони мають частіше

усього форму системи рівнянь. Структурні можуть мати форму матриць, графів, списків векторів і виражати взаємне розташування елементів у просторі. Ці моделі звичайно використовують у випадках, коли задачі структурного синтезу вдається ставити і вирішувати абстрагуючись від фізичних процесів в об'єкті. Вони відбивають структурні властивості об'єкта.

За способами одержання функціональних математичних моделей - теоретичні й формальні. Теоретичні одержують на основі вивчення фізичних закономірностей. Структура рівнянь і параметри моделей мають певне фізичне тлумачення. Формальні одержують на основі прояву властивостей об'єкта, що моделюється в зовнішньому середовищі, тобто розгляд об'єкта як кібернетичної «чорної скриньки». Теоретичні моделі більш універсальні і справедливі для широких діапазонів зміни зовнішніх параметрів. Формальні більш точні в діапазоні, у якому робилися виміри.

Залежно від вигляду рівнянь, що використовуються у математичній моделі об'єкта, моделі підрозділяються на статичні і динамічні. У статичних моделях використовуються лінійні і нелінійні алгебраїчні рівняння і їхні системи, а в динамічних - лінійні і нелінійні диференціальні рівняння і їх системи. Статичні моделі оперують характеристиками об'єкта, які не змінюються в часі. У динамічних моделях, які зазвичай більш складні, зміна параметрів у часі є суттєвим. Статичні моделі звичайно мають справу з усталеними процесами, рівняннями балансового типу, з граничними стаціонарними характеристиками. Моделювання динамічних систем полягає в імітації правил переходу системи з одного стану в інший з плином часу. Під станом системи розуміється набір значень се істотних параметрів і змінних. Зміна стану системи в часі в динамічних системах - це зміна значень змінних системи відповідно до законами, що визначають зв'язки змінних і їх залежності один від одного у часі.

Залежно від лінійності і нелінійності рівнянь - лінійні і нелінійні.

Залежно від множини значень змінних неперервні і дискретні.

За формою зв'язків між вихідними, внутрішніми і зовнішніми змінними - алгоритмічні й аналітичні.

В залежності від того, яким чином в роботі моделі враховуються випадкові процеси, при таманні реальним об'єктам, моделі діляться на детерміновані та стохастичні. При моделюванні складних реальних систем дослідник часто стикається з ситуаціями, в яких випадкові дії відіграють істотну роль. Стохастичні моделі, на відміну від детермінованих, враховують імовірнісний характер параметрів модельованого об'єкта. Привести в приклад вивчення систем управління з урахуванням шумів датчиків. Класи точності приладів.

Процес математичного моделювання включає наступні основні етапи:

1. Розроблення математичної моделі об'єкта

Цей етап є найбільш складним, трудомістким і відповідальним. На основі теоретичних знань, емпіричних і інтуїтивних підходів складаються математичні рівняння, що враховують найбільш важливі й істотні, з точки зору дослідника, властивості об'єкта. При розробці математичної моделі необхідно уникати невиправданого ускладнення моделі, відкидаючи несуттєві взаємозв'язки між характеристиками об'єкта.

Як приклад розглянемо математичну модель асинхронного двигуна (АД). Рівняння механічної характеристики (за формулою Клосса)

$$M = \frac{2 \cdot \lambda}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}} \quad (1.1)$$

є математичною моделлю АД, тому що відбиває одну з істотних властивостей - залежність між моментом і ковзанням в усталеному режимі роботи АД. Однак дана модель у деяких випадках може виявитися недостатньо точною, тому що вона не враховує таких явищ, як

насичення сталі і витіснення струму при пуску двигуна. У той же час у діапазоні ковзань $0 \leq s \leq s_k$ вона дає цілком задовільні результати.

Таким чином, при розробці математичної моделі необхідно прийняти допущення й обмеження на діапазоні застосування моделі.

2. Одержання рішень математичної моделі

На цьому етапі, попередньо задаючись значенням параметрів рівнянь, які є математичною моделлю, знаходять їхні рішення в аналітичному або чисельному вигляді. Для складних моделей рішення відшукують на ЕОМ.

Цей етап допускає розробку структурних схем для АОМ або розробку і налагодження програм для ЦОМ.

3. Оцінка адекватності отриманих результатів

Отримані з використанням моделі результати необхідно оцінити з точки зору їхньої відповідності основним фізичним законам і іншими обмеженнями.



Тема 2. Математичне моделювання базових елементів електротехнічних систем

Існує ряд моделей, на основі яких може бути побудована будь-яка електрична модель приладу. Ці моделі одержали назву *базового набору елементів моделей*.

2.1 Активні елементи принципів схем (джерела напруги й струму)

Ідеальні активні елементи - ідеальні джерела напруги або струму - вводяться для характеристики реальних джерел електричної енергії, у яких неелектричні види енергії (хімічна, механічна) перетворюються в електричну. Залежно від виду ВАХ і можливості керування вихідними параметрами розрізняють залежні й незалежні джерела напруги й струму.

Незалежне ідеальне джерело напруги являє собою двополюсний елемент, напруга на якому змінюється в часі за деяким законом $e(t)$, що не залежить від величини струму, що проходить через джерело. Вихідна характеристика джерела $u(i)$, його еквівалентна схема замінювання (рис. 2.1). У режимі короткого замикання величина струму джерела прагне до нескінченності, джерело віддає нескінченно велику потужність у навантаження.

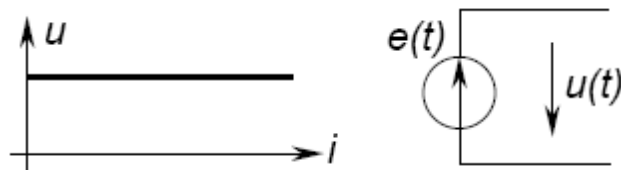


Рисунок 2.1 - Незалежне ідеальне джерело ЕРС

Незалежне ідеальне джерело струму являє собою двополюсний елемент, вихідний струм якого змінюється, за деяким законом у часі незалежно від напруги на елементі. Джерело віддає у навантаження нескінченно велику потужність при холостому ході. Еквівалентна схема й ВАХ джерела зображені на рис. 2.2.

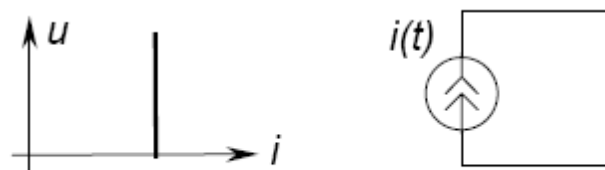


Рисунок 2.2 - Незалежне ідеальне джерело струму

Залежні ідеальні джерела напруги або струму являють собою триполюсні або чотириполюсні елементи (необоротні), які ставлять у залежність від вхідного сигналу (напруги або струму) вихідний струм або напругу. Якщо керування залежними джерелами здійснюється струмом, то його вхід являє собою коротке замикання, якщо напругою – холостий хід. Зображення залежних джерел напруги або струму наведено на рис. 2.3.

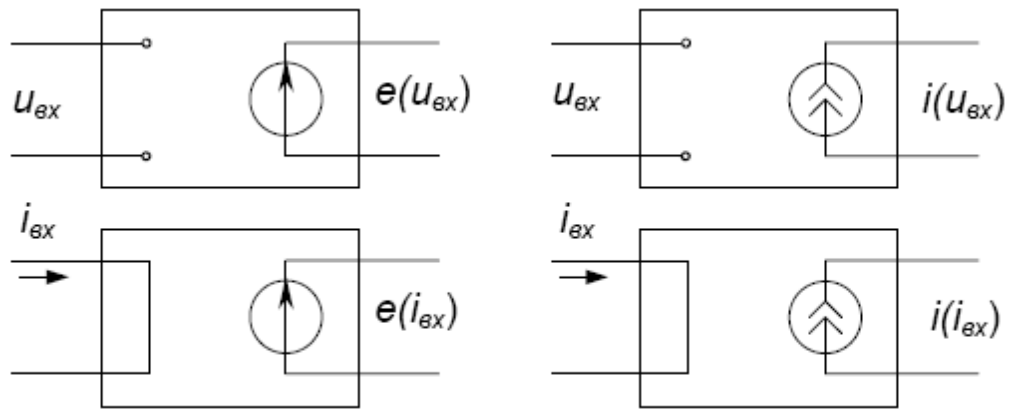


Рисунок 2.3 - Залежні ідеальні джерела ЕРС та струму

2.2 Ідеальні пасивні елементи принципів схем

Ідеальний лінійний резистор характеризується опором R і провідністю G . Розмірності величин: $R[\text{Ом}]$, $G[\text{См}]$, $U=iR$.

Нелінійний опір характеризується ВАХ (рис. 2.4):



Рисунок 2.4 - ВАХ нелінійного резистора

Фазові зрушення в елементі відсутні.

Ідеальний індуктивний елемент характеризується потокозчепленням, що виникає при протіканні струму через деякий контур, причому вважається, що активний опір контуру дорівнює 0. Відношення потокозчеплення до струму називається індуктивністю L :

$$L = \frac{\Psi}{i}$$

Розмірності величин: $[i]=A$, $[\Psi]=B\phi=B\cdot c$, $[L]=B\phi/A=(B\cdot c)/A=\text{Гн}$

Енергія, накопичена в полі:

$$W_M = \frac{\Psi I}{2}$$

Закон електромагнітної індукції зв'язує швидкість зміни магнітного потоку й е.р.с., що наводиться в контурі:

$$e = \frac{d\Psi}{dt}$$

Якщо $L=\text{const}$, то

$$e = L \frac{di}{dt}$$

Закон можна переписати в іншому вигляді:

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t e(t) dt$$

Реактивний опір контуру змінному струму залежить від частоти синусоїдального сигналу: $|X_L| = \omega L$. Фазове зрушення між струмом і напругою — 90° . Струм відстає від напруги на зазначений кут. Якщо на індуктивність подана напруга: $u = U_m \cos \omega t$, при цьому струм у ланцюзі:

$$i = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t$$

Потужність, що циркулює в ланцюзі:

$$P = u \cdot i = \frac{U_m^2}{\omega L} \sin \omega t \cos \omega t = \frac{U_m^2}{2\omega L} \sin 2\omega t$$

Таким чином, енергія не споживається навантаженням, а здійснюється лише періодичний обмін енергією (рис. 2.5):

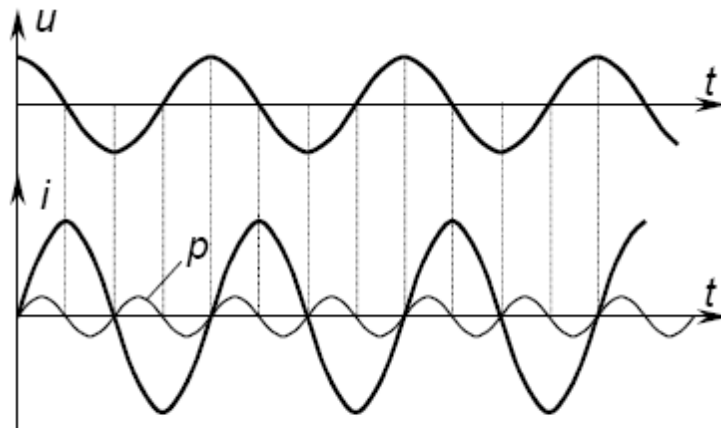


Рисунок 2.5 - Часові діаграми гармонійного сигналу на індуктивності

Ідеальна ємність накопичує енергію електростатичного поля.

Заряд ємності:

$$Q = Q_0 + \int_0^t i(t) dt \quad i = \frac{dQ}{dt}$$

Якщо ємність лінійна, то заряд $Q = CU$, де C – власна ємність конденсатора. Розмірність величин: $[Q] = Кл$, $[U] = В$, $[C] = Кл/В = Ф$

Енергія, накопичена в ємності:

$$W_{\varepsilon} = \frac{QU}{2}$$

Для лінійної ємності можна також записати:

$$W_{\text{э}} = \frac{CU^2}{2}; \quad i = C \cdot \frac{dU}{dt}; \quad u = U_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i dt$$

Опір ємнісного ланцюга змінному струму:

$$|X_c| = \frac{1}{\omega C}$$

Напруга на ємності відстає від струму на 90° . Якщо струм у ланцюзі:

$$i_c = I_m \cos \omega t,$$

Та напруга:

$$u_c = \frac{I_m}{\omega C} \sin \omega t$$

Потужність у ланцюзі:

$$P = u_c \cdot i_c = \frac{I_m^2}{2\omega C} \sin 2\omega t$$

Тобто, як і у випадку індуктивності, споживання енергії не відбувається, здійснюється лише обмін енергією між джерелом і навантаженням (рис. 2.6).

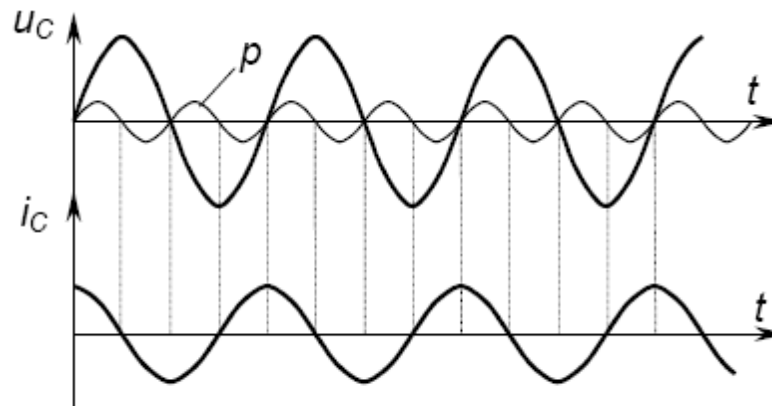


Рисунок 2.6 - Часові діаграми гармонійного сигналу на ємності

Моделі будь-якого компонента електричного кола можуть бути відображені комбінацією найпростіших елементів базового набору.

2.3 Реальні пасивні елементи принципів схем та їх моделі

2.3.1 Реальний резистор

Вольтамперна характеристика реального резистора на постійному струмі не відрізняється від ідеальної. При створенні високочастотної моделі необхідно враховувати особливості виготовлення. За рахунок наявності індуктивності виводів і резистивного шару опір резисторів на високій частоті стає комплексним, здобуває індуктивний характер:

$$X_R = R + j\omega L$$

З підвищенням частоти проявляються також ємнісні властивості резистора – в основному ємність між його виводами. У такий спосіб еквівалентна схема із зосередженими параметрами має вигляд (рис. 2.7):

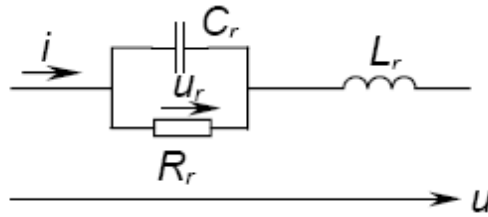


Рисунок 2.7 - Еквівалентна схема резистора із зосередженими параметрами

У принципі, параметри резистора повинні бути розподіленими, однак їх врахування значно ускладнює аналіз і застосовується лише при роботі на надвисоких частотах і при розрахунку елементів у гібридному виконанні. Наведену еквівалентну схему можна описати системою 2-х диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} u = u_r + L_r \frac{di}{dt} \\ i = \frac{u_r}{R_r} + C_r \frac{du_r}{dt} \end{cases}$$

де C_r, L_r – величини паразитних параметрів, u_r – напруга на активній складовій резистора. Залежно від співвідношення параметрів еквівалентна схема резистора може бути спрощена. Для високоомних резисторів, у яких

$$R \gg \sqrt{\frac{L_r}{C_r}}$$

тобто активний опір значно більше реактивного, можна знехтувати його індуктивною складовою. При цьому модель приймає вид (рис. 2.8):

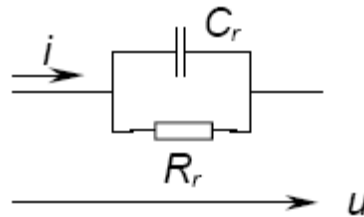


Рисунок 2.8 - Еквівалентна схема високоомного резистора із зосередженими параметрами

Повний опір синусоїдальному сигналу можна знайти з розрахунку:

$$Z_R = \frac{R_r \cdot \frac{1}{j\omega C_r}}{R_r + \frac{1}{j\omega C_r}} = \frac{R_r}{1 + j\omega C_r R_r} = \frac{R_r}{1 + \omega^2 R_r^2 C_r^2} - j \cdot \frac{\omega C_r R_r^2}{1 + \omega^2 R_r^2 C_r^2}$$

Тут перший доданок – активна складова повного опору, другий – реактивна складова. Для низькоомних резисторів можна знехтувати ємнісною складовою комплексного опору. При цьому схема має вигляд (рис. 9):

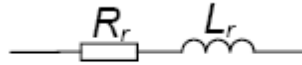


Рисунок 2.9 - Еквівалентна схема низькоомного резистора із зосередженими параметрами

Зазначену особливість необхідно враховувати при проектуванні схем, особливо надвисокочастотних.

2.3.2 Реальний електричний конденсатор

В електроніці конденсатори виконуються у вигляді струмопровідних обкладинок, розділених діелектриком. Величина ємності залежить від площі обкладинок S і ϵ діелектрика. Розрізняють конденсатори з газоподібним, рідким, твердим, оксидним діелектриком. На високих частотах необхідно враховувати втрати в діелектрику, струми витоку, індуктивний опір обкладинок і виводів. Еквівалентна схема конденсатора на високих частотах має вигляд (рис. 2.10):

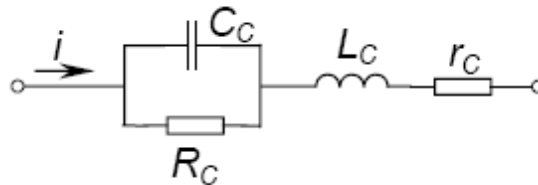


Рисунок 2.10 - Еквівалентна схема конденсатора на високих частотах

Повний опір конденсатора залежить від частоти й визначається за формулою:

$$|Z_c| = \sqrt{r_c^2 + \left(-\frac{1}{\omega C_c} + \omega L_c \right)^2}$$

Тут зроблене допущення, що $R_c \gg r_c$, що справедливо на високих частотах. Опір витоку R_c враховується, як правило, лише в прецизійних схемах і при розрахунку повільних процесів. Залежність $Z_c(f)$ відповідно до наведеного співвідношення має вигляд (рис. 2.11):

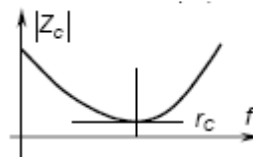


Рисунок 2.11 – Залежність повного опору конденсатора від частоти

Таким чином, після резонансної частоти

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_c C_c}}$$

опір конденсатора здобуває індуктивний характер. Слід зазначити, що для електролітичних конденсаторів величина ємності непостійна, а також залежить від частоти роботи, що пояснюється процесами поляризації діелектрика.

Можна запропонувати апроксимацію залежності $C_c(f)$ у вигляді:

$$C_c = \frac{C_0}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^\alpha},$$

де C_0 – номінальна ємність конденсатора, f_0 – частота, на якій ємність падає вдвічі, α – деякий коефіцієнт, що враховує швидкість спаду ємності.

2.3.3 Реальна індуктивність

Індуктивність являє собою магнітопровід із виконаною на ньому обмоткою. Еквівалентна схема індуктивності з урахуванням омичного опору обмотки має вигляд рис. 2.12:

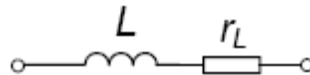


Рисунок 2.12 - Еквівалентна схема індуктивності

Повний опір реальної індуктивності змінному струму частотою ω дорівнює:

$$Z = r_L + j\omega L \quad |Z| = \sqrt{r_L^2 + (\omega L)^2}.$$

Індуктивність, виконана на осердді з феромагнітного матеріалу, як правило, нелінійна при роботі в сильних полях. Її характеристика збігається з магнітною характеристикою феромагнетика й може бути зображена у вигляді графіка (див. рис. 2.13):

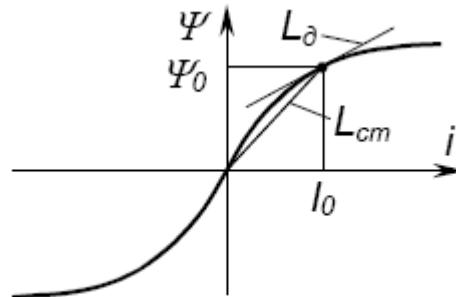


Рисунок 2.13 – Характеристика намагнічування індуктивності з осерддям

Якщо на індуктивність поданий постійний струм підмагнічення I_0 , то можна виділити диференціальну індуктивність L_δ і статичну індуктивність L_{cm} , що представлені виразами:

$$L_{cm} = \frac{\Psi_0}{I_0}; \quad L_\delta = \left. \frac{d\Psi}{dI} \right|_{I=I_0}$$

В обмотці за рахунок протікання струму створюється напруженість магнітного поля H , обумовлена законом повного струму:

$$i \cdot w = H \cdot l_{cp} \Rightarrow H = \frac{i \cdot w}{l_{cp}}; \quad [H] = \frac{A}{m}$$

Якщо магнітна проникність матеріалу μ , то величина індукції в осердді становить

$$B = \mu\mu_0 H, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}.$$

Для тороїдального осердя в припущенні рівномірного розподілу магнітного поля справедливо:

$$\Psi = BS w; \quad H = \frac{i \cdot w}{l_{cp}}; \quad l_{cp} = \pi \frac{d_1 + d_2}{2},$$

де l_{cp} – середня довжина магнітної силової лінії, рівна напівсумі зовнішнього й внутрішнього діаметра кільця, помножена на π . При цьому індуктивність тороїдального осердя з обмоткою можна розрахувати за формулою:

$$L = \frac{\Psi}{i} = \frac{\mu \mu_0 S w^2}{l_{cp}}.$$

Магнітну характеристику матеріалу звичайно апроксимують кусочно-лінійною функцією при грубому розрахунку (див. рис. 2.14). При цьому в діапазоні:

$$-H_s \leq H \leq +H_s, \quad L = \frac{B_s}{H_s}, \quad \text{при} \quad |H| > H_s \quad L = 0, \quad \text{т.е.} \quad B = B_s$$

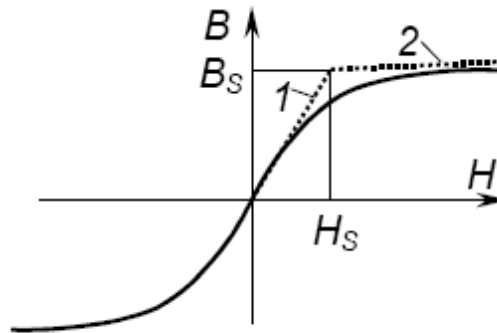


Рисунок 2.14 - Апроксимація магнітної характеристики кусочно-лінійною функцією

Така апроксимація є досить грубою, зокрема, вона не відбиває реальних фізичних процесів у другій області. Адже, навіть якщо припустити, що в області насичення властивості феромагнетику зникають зовсім, то це означає, що μ феромагнетику стає рівною 1. Тобто при $|H| > H_s$ магнітний потік необхідно розраховувати за формулою:

$$B = \mu_0 H;$$

Це відповідає апроксимації (рис. 14, лінія 2). У ряді випадків виявляється більш зручною апроксимація магнітної характеристики аналітичним виразом виду:

$$B = B_s \cdot \tanh \beta H;$$

де коефіцієнт β виражає «крутість» і момент перегину магнітної характеристики.

Змінна величина індуктивності може привести до розходження перехідних процесів у схемах, якщо осердя працює з підмагнічуванням або без нього. Ряд магнітних матеріалів має гістерезисні властивості, які проявляються в тому, що крива намагнічування перетворюється в петлю, що залежить від напруженості поля перемагнічування H , швидкості й амплітуди B_m індукції в сердечнику.

Тема 3. Математичне моделювання напівпровідникових елементів

Моделі напівпровідникових приладів, як правило, нелінійні, можна сформувати двома способами. При першому (*фізичному*) способі проводять аналіз електричних процесів, що відбуваються в структурі напівпровідникового приладу, виражають струми й напруги на електродах приладу відповідно до процесів, що відбуваються в ньому, що, власно, і дає ВАХ приладу. Отриману модель представляють базовими моделями резисторів, індуктивностей і ємностей, залежними й незалежними джерелами струму й напруги, додавши реактивні компоненти, що відповідають властивостям конструктивного виконання приладу, одержують повну модель, причому в неї входять параметри структури приладу і його корпусу.

При другому підході використовується ВАХ приладу, що відома або знята *експериментально*. ВАХ апроксимується із заданою точністю на тій ділянці, на якому передбачається робота приладу. При цьому модель буде містити деякі емпіричні коефіцієнти, не пов'язані з реальною фізичною структурою приладу. При другому підході за основу може бути прийнята також деяка графічна модель.

3.1 Модель напівпровідникового діода

Напівпровідниковий діод – електронний перетворювальний прилад, що складається з одного *p-n*-переходу. Структура діода з електронно-отвірним переходом і його умовне позначення показані на рис. 3.1.

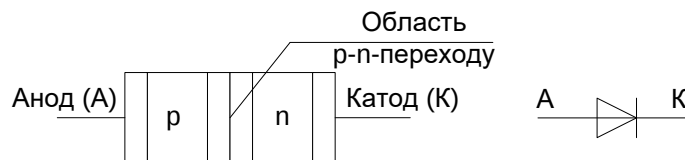


Рисунок 3.1 - Конструкція та умовне позначення напівпровідникового діода

Електронно-отвірним переходом називається тонкий шар між двома частинами напівпровідникового кристала, у якому одна частина має електронну провідність (*n*-типу), а інша – отвірну (*p*-типу). Будова електронно-отвірного переходу показана на рис. 3.2.

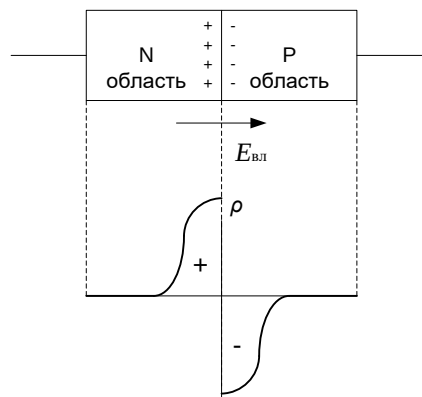


Рисунок 3.2 – Принцип функціонування електронно-отвірного переходу

Виникнення різних видів провідності в кристалах напівпровідника обумовлене наявністю в них легуючих домішок. Домішки, що викликають у напівпровіднику збільшення електронів

називаються донорними, а збільшення отворів – акцепторними. Концентрація електронів в одній частині й концентрація дірок в іншій частині істотно відрізняються. Крім того в обох частинах є невелика концентрація неосновних носіїв.

Електрони в n -області прагнуть проникнути в p -область, де концентрація електронів значно нижче. Аналогічно дірки з p -області переміщуються в n -область. У результаті зустрічного руху протилежних зарядів виникає так званий дифузійний струм. Електрони й отвори, перейшовши через межу розділу, залишають після себе протилежні заряди, які перешкоджають подальшому проходженню дифузійного струму. Розподіл щільності об'ємного заряду показано на рис. 3.2.

При цьому всередині кристалу на межі розділу виникає власне електричне поле. Висота потенційного бар'єру на p - n -переході визначається контактною різницею потенціалів областей. Контактна різниця потенціалів залежить від концентрації домішок в областях.

Висоту потенційного бар'єру можна змінювати прикладенням зовнішньої напруги до p - n -переходу. Якщо зовнішня напруга створює поле, що збігається із внутрішнім, то висота потенційного бар'єру збільшується й струм через перехід відсутній. При зворотній полярності прикладеної напруги висота потенційного бар'єру зменшується. Якщо прикладена напруга досягає значення контактної різниці потенціалів, то потенційний бар'єр зникає повністю. У результаті через p - n -перехід починає протікати струм (рис. 3.3).

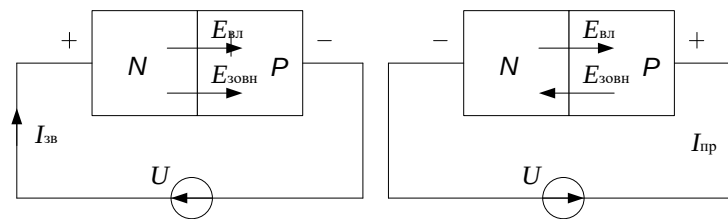


Рисунок 3.3 – Функціонування p - n -переходу напівпровідникового діода

Зворотний струм, що виникає в p - n -переході, викликаний неосновними носіями зарядів однієї з областей.

Вольт-амперну характеристику реального діода можна представити у вигляді рис. 3.4.

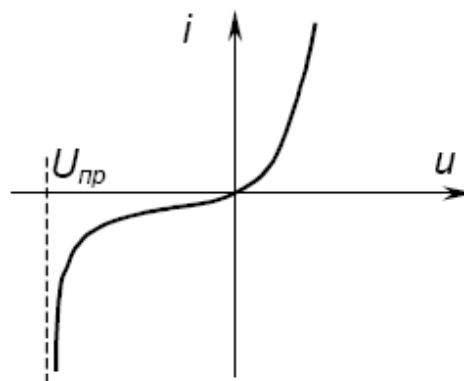


Рисунок 3.4 - Вольт-амперна характеристика реального діода

На практиці досить часто використовують кусочно-лінійну апроксимацію ВАХ, що досить точно відповідає реальній на окремих ділянках характеристики. Замінімо ВАХ наступною кусочно-ламанною лінією (рис. 3.5):

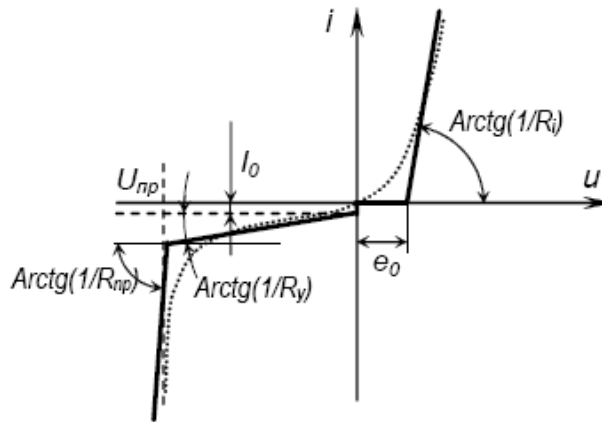


Рисунок 3.5 - Кусочно-ламана апроксимація вольт-амперної характеристики діода

Параметри апроксимуючих прямих: R_i , e_0 , I_0 , R_y , $U_{пр}$, $R_{пр}$ визначаються по характеристиці на окремих її ділянках. Даній апроксимації відповідає кусочно-лінійна модель напівпровідникового діода. Її можна представити у вигляді наступної еквівалентної схеми (рис. 3.6):

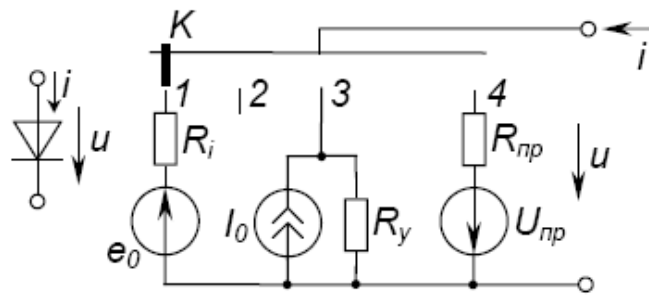


Рисунок 3.6 – Еквівалентна схема напівпровідникового діода

Положення ключа K на зазначеній моделі визначається з наступних умов:

1. положення при $i > 0, u > e_0$.
2. положення при $0 \leq U \leq e_0$.
3. положення при $-U_{пр} \leq U \leq 0; i < 0$.
4. положення при $U < -U_{пр}$.

Подібна модель достатня спрощена, вона використовується звичайно при початковому наближеному розрахунку електронної схеми, при самих грубих наближеннях її іноді ще більше спрощують і приводять до наступного вигляду, (рис.3.7):

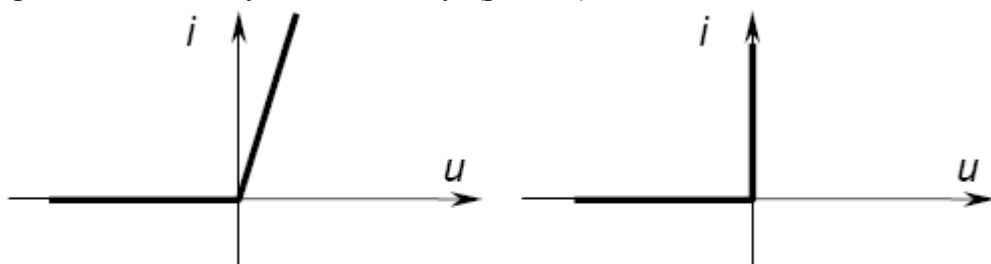


Рисунок 3.7 – Варіанти спрощених вольт-амперних характеристик напівпровідникового діода

Нижче наведено витяг з технічної документації програми MATLAB, у наведеному документі наведено відомості про математичну модель напівпровідникового діода, використану у цій програмі.

Diode

Implement diode model

[expand all in page](#)

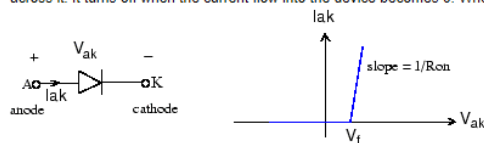
Library

Power Electronics

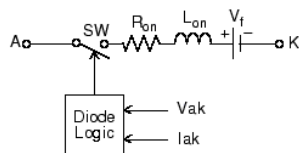
Description



The diode is a semiconductor device that is controlled by its own voltage V_{ak} and current i_{ak} . When a diode is forward biased ($V_{ak} > 0$), it starts to conduct with a small forward voltage V_f across it. It turns off when the current flow into the device becomes 0. When the diode is reverse biased ($V_{ak} < 0$), it stays in the off state.



The Diode block is simulated by a resistor, an inductor, and a DC voltage source connected in series with a switch. The switch operation is controlled by the voltage V_{ak} and the current i_{ak} .



The Diode block also contains a series Rs-Cs snubber circuit that can be connected in parallel with the diode device (between nodes A and K).

3.2 Стабілітрони

Стабілітрони – це напівпровідникові діоди, що працюють у режимі пробою. При зворотному зсуві напівпровідникового переходу виникає електричний пробій, при цьому в широкому діапазоні зміни струму через діод напруга на ньому міняється дуже несуттєво. Ця властивість використовується в різних схемах для стабілізації рівня напруги або обмеження перенапруг. На рис. 3.8 показано схематичне зображення стабілітронів і їх ВАХ.

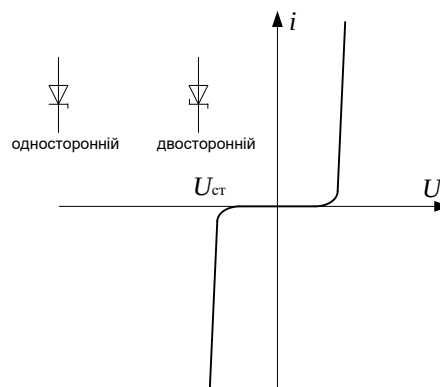


Рисунок 3.8 – Позначення стабілітрона на принциповій схемі та його вольт-амперна характеристика

Диференціальний опір стабілітрона – це параметр, що характеризує нахил ВАХ в області пробою. На рис. 3.9 наведена лінеаризована характеристика стабілітрона, за допомогою якої можна визначити його диференціальний опір і побудувати його схему заміщення.

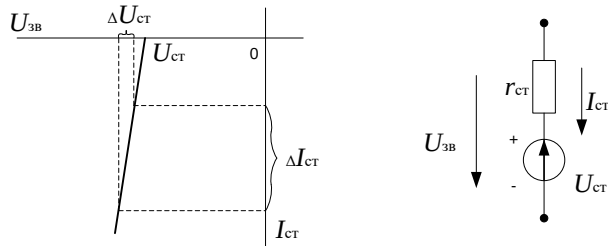


Рисунок 3.9 - Лінеаризована характеристика стабілітрона та визначення його диференціального опору

3.3 Варикапи

Варикапи – це напівпровідникові діоди, у яких використовується бар'єрна ємність p - n -переходу. Ця ємність залежить від прикладеного до діода зворотної напруги та з її збільшенням зменшується. Добротність бар'єрної ємності варикапа може бути досить високою, тому що вона шунтується високим опором переходу при зворотному зміщенні.

Еквівалентна схема варикапа наведена на рис. 3.10, де $C_б$ – бар'єрна ємність, $R_{ш}$ – опір переходу й шунтувальних його витоків, обумовлених конструкцією варикапа, $R_{п}$ – опір матеріалу напівпровідника й контакту.

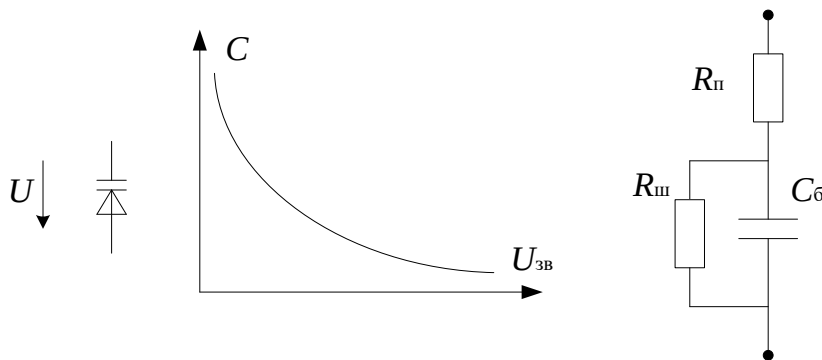


Рисунок 3.10 - Позначення варикапа на принциповій схемі та його характеристика і еквівалентна схема

3.3 Тунельний діод

Тунельний ефект досягається створенням дуже тонкого збідненого шару (0,01 мкм). При цьому значний струм починає проходити через перехід при напрузі, меншій контактної різниці потенціалів.

ВАХ, схематичне зображення й схема заміщення тунельного діода показані на рис. 3.11.

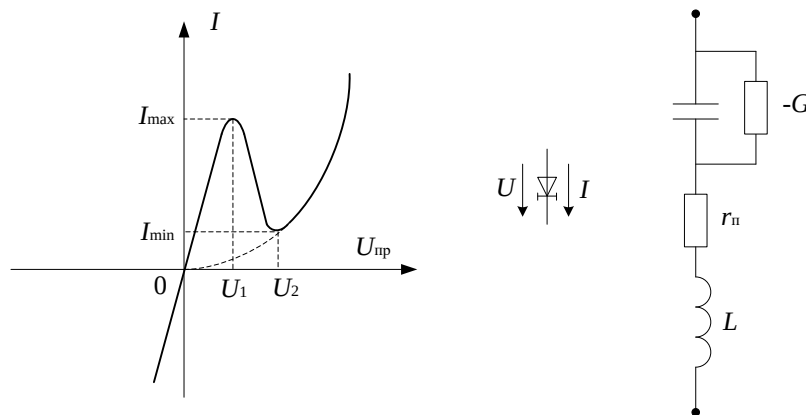


Рисунок 3.11 - Позначення тунельного діода на принциповій схемі та його характеристика і еквівалентна схема

Струм при тунельному ефекті проходить в обох напрямках, тільки в області прямого зсуву струм спочатку росте, а досягши значення $I_{\max}$ при напрузі U_1 , досить різко спадає до значення $I_{\min}$ при напрузі U_2 . Зниження струму пов'язане з тим, що з ростом напруги в прямому напрямку зменшується число електронів, здатних зробити тунельний перехід. При напрузі U_2 число таких електронів стає рівним нулю й тунельний струм зникає.

При подальшому підвищенні напруги вище U_2 проходження прямого струму таке ж, як у звичайного діода, і визначається дифузією.

Схема заміщення тунельного діода складена для робочої ділянки негативного опору. Позначення на схемі: C – ємність діода в точці мінімуму ВАХ, $-G$ – негативна провідність на спадаючій ділянці, r_{π} – послідовний опір втрат, L – індуктивність виводів.

3.4 Зворотній діод

Зворотній діод є виродженим тунельним діодом. Підбором концентрації домішок таким чином, щоб границі зон не перекривалися, а збігалися при відсутності зовнішнього зсуву на переході, можна одержати звичайну діодну характеристику в області позитивних напруг. При цьому ділянка негативного опору буде відсутня. ВАХ зворотного діода і його схематичне зображення представлене на рис. 3.12.

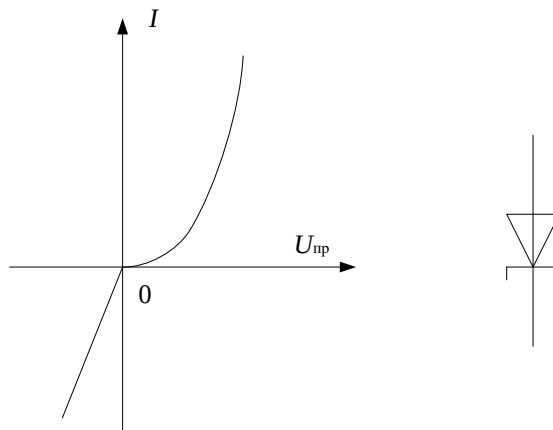


Рисунок 3.12 - Позначення зворотного діода на принциповій схемі та його характеристика

Зворотні діоди застосовуються для випрямлення на надвисоких частотах дуже малих напруг. Це обумовлено практичною відсутністю граничної зворотної напруги. Однак при цьому потрібно міняти місцями анод і катод, тому що міняються місцями області випрямлення.

3.5 Фотодіод

Фотодіод являє собою діод з відкритим p - n -переходом. Світловий потік, що падає на відкритий p - n -перехід призводить до появи в одній з областей додаткових неосновних носіїв зарядів, у результаті чого збільшується зворотний струм.

ВАХ фотодіода і його схематичне зображення представлене на рис. 3.13,

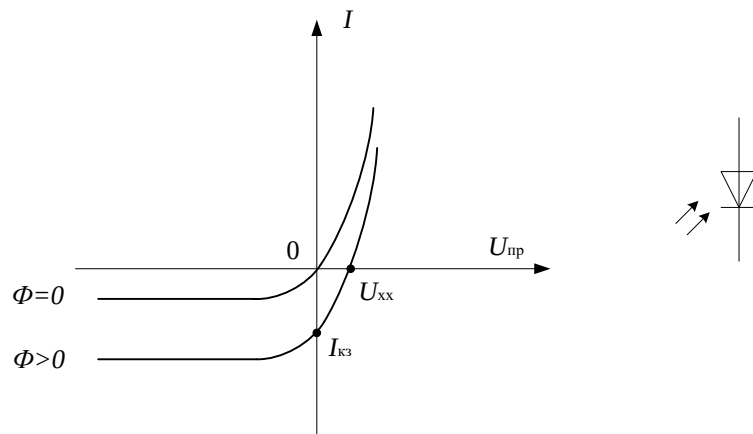


Рисунок 3.13 - Позначення фотодіода на принциповій схемі та його характеристика

При $I = 0$ область P заряджається позитивно, а область N – негативно й між електродами фотодіода при освітленні виникає різниця потенціалів, названа фото-ерс, що дорівнює напрузі холостого ходу $U_{хх}$.

3.6 Світлодіод

Світловипромінюючі діоди (світлодіоди) перетворюють електричну енергію в світлове випромінювання за рахунок рекомбінації електронів та отворів. В світлодіодах рекомбінація (об'єднання) електронів та отворів проходить з випроміненням світла та називається фотонною. Зазвичай таке випромінення буває резонансним та лежить у вузькій смузі частот. Довжина хвилі випромінення залежить від матеріалу світлодіода. Схематичне зображення світлодіода та його характеристика у вигляді залежності сили світла від струму зображені на рисунку 3.14.

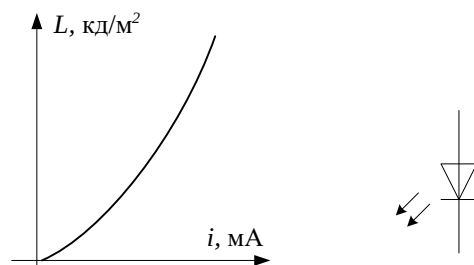


Рисунок 3.14 - Позначення світлодіода на принциповій схемі та його характеристика

3.7 Фоторезистор

Фоторезистором називають напівпровідниковий прилад, опір якого чутливий до світлового випромінювання. Схематичне зображення структури фоторезистора та його умовне графічне позначення показані на рисунку.

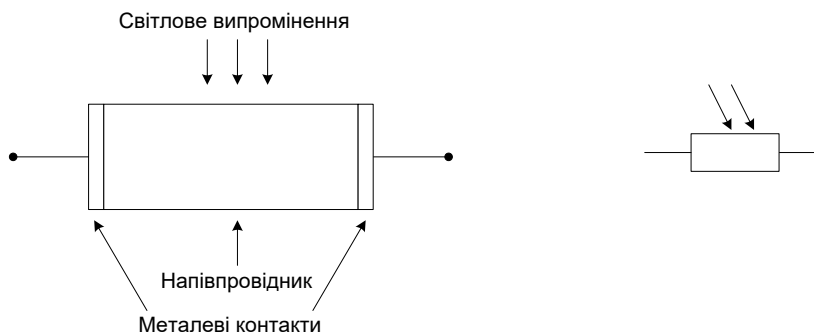


Рисунок 3.15 – Конструкція та позначення фоторезистора на принциповій схемі

Потік фотонів, що падає на напівпровідник, викликає появу пар «електрон-отвір», що підвищує провідність, зменшуючи опір. Це явище називається внутрішнім фотоелементом (ефектом фотопровідності).

Фоторезистори часто характеризуються залежністю струму i від освітленості E при заданій напрузі на резисторі (так звана люкс-амперна характеристика, рис. 3.16). Опір фоторезистора може змінюватися в досить широких межах ($10^7 \dots 10^8$ раз).

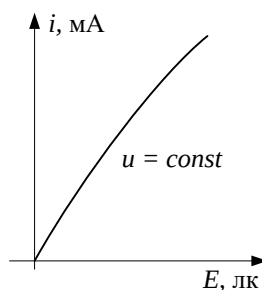


Рисунок 3.16 – Люкс-амперна характеристика фоторезистора

ВАХ фоторезистора відрізняється високою лінійністю та симетричністю, що обумовлює широке застосування в аналогових пристроях. Фоторезистори можуть використовуватися в якості датчиків освітленості, а також положення (в парі разом з приладом, що випромінює світло).

3.8 Тиристори

Тиристор – напівпровідниковий прилад із трьома p - n -переходами. Спрощене схематичне зображення структури тиристора і його умовне зображення показані на рис. 3.17.

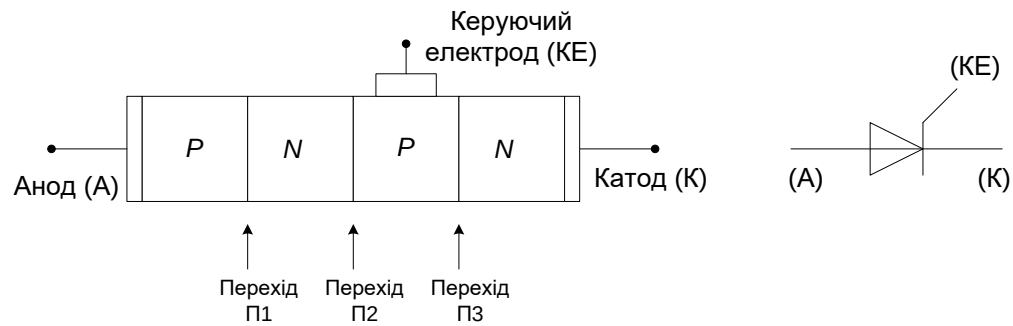


Рисунок 3.17 - Конструкція та умовне позначення тиристора

Тиристри, що не мають керуючого електрода називається некерованими (діодними) тиристорами, або диністорами.

ВАХ тиристора за відсутності струму в керуючому електроді наведена на рис. 3.18.

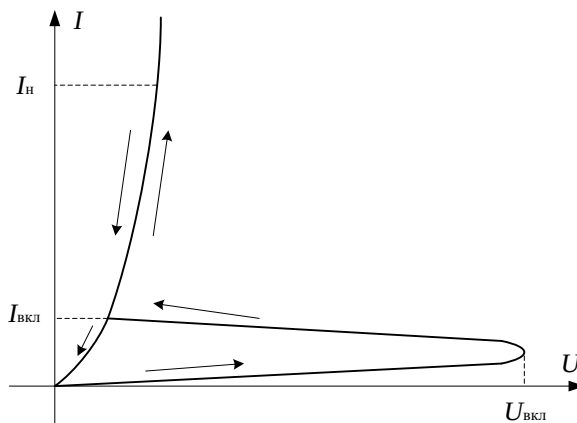


Рисунок 3.18 – Вольт-амперна характеристика тиристора за відсутності струму в керуючому електроді

При подачі напруги до значення $U_{\text{вкл}}$ між анодом і катодом тиристор залишається виключеним, маючи досить високий опір. Після досягнення значення напруги включення $U_{\text{вкл}}$ тиристор включається, струм починає стрімко зростати, досягаючи значення $I_{\text{н}}$.

Поступове зниження анодного струму нижче значення $I_{\text{вкл}}$, при якому ввімкнувся тиристор, не призводить до вимикання тиристора. Таким чином, ВАХ включеного тиристора аналогічна ВАХ діода.

При збільшенні струму керування знижується напруга включення тиристора. Відповідне сімейство ВАХ наведено на рис. 3.19. При цьому струм керування не впливає на процес вимикання тиристора. Для вимикання тиристора на нього подають напругу зворотної полярності, яку підтримують протягом деякого часу $t_{\text{викл}}$.

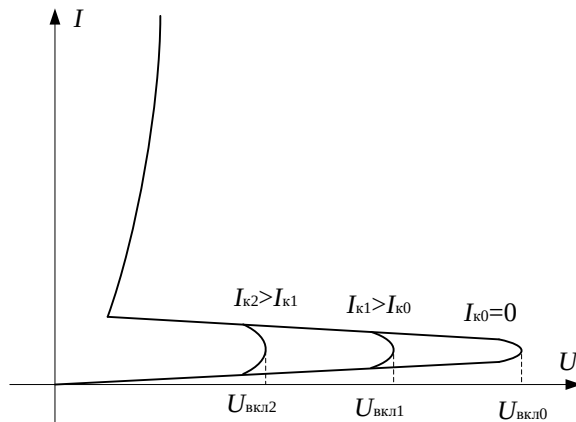


Рисунок 3.19 – Вольт-амперна характеристика тиристора при збільшенні струму керування

Таким чином, залежно від наявності струму через керуючий електрод тиристор може працювати в ключовому режимі.

Типове застосування тиристорів – силова перетворювальна техніка: керовані випрямлячі та інвертори.

3.9. Біполярний транзистор

Біполярний транзистор – напівпровідниковий прилад з двома р-п-переходами, має три виводи (електроди). Структура біполярного транзистора може бути двох типів *p-n-p* та *n-p-n*. Принцип дії біполярного транзистора заснований на використанні носіїв заряду обох знаків (електронів та отворів), що пояснює його назву. Схематичне зображення структури біполярного транзистора та його умовне графічне позначення показані на рис. 3.20.

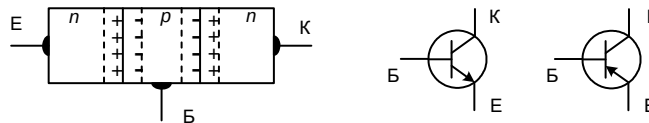


Рисунок 3.20 - Конструкція та умовне позначення біполярного транзистора

В активному режимі роботи (рис. 3.21) напруга між емітером та базою $u_{еб}$ являється прямою, а між колектором та базою $u_{кб}$ – зворотною, тому емітерний перехід відкритий, а колекторний закритий. Під дією прямої напруги $u_{еб}$ основні носії заряду (в даному випадку – електрони) з емітера переходять в базу, де вони стають неосновними носіями, для яких закритий колекторний перехід не являється перепорою. Тому вони вільно переходять в колектор, створюючи в зовнішньому колі колекторний струм I_k , напрям додатного струму протилежний руху електронів.

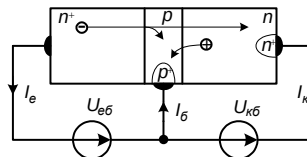


Рисунок 3.21 – Активний режим роботи біполярного транзистора

Біполярний транзистор описується сімействами вхідних та вихідних ВАХ. Вхідні ВАХ представлені залежностями вхідного струму від вхідної напруги при постійній вихідній напрузі, вихідні ВАХ – це залежності вихідного струму від вихідної напруги при постійному вхідному струмі. Для схеми із загальною базою, коли вхідний та вихідний джерела наруги мають спільний контакт на базі, сімейства вхідних та вихідних ВАХ представлені відповідно наступними залежностями та показані на рис. 3.22

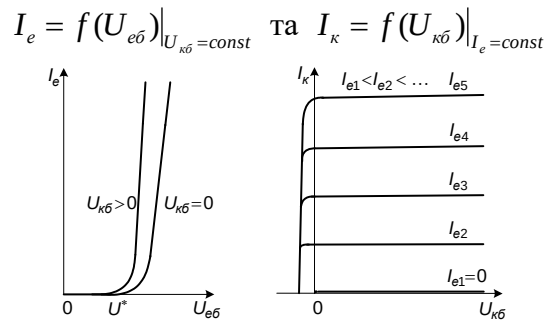


Рисунок 3.22 - Сімейства вхідних та вихідних вольт-амперних характеристик біполярного транзистора

Вхідна характеристика значною мірою визначається характеристикою емітерного переходу, а тому аналогічна характеристиці діода. Зсув характеристики вліво при збільшенні вихідної напруги $u_{кб}$ пояснюється проявом ефекту Ерлі – ефекту модуляції товщини бази, суть якого наступна. При збільшенні напруги $u_{кб}$ колекторний перехід (при зворотному зміщенні) розширюється за рахунок бази, товщина якої зменшується. Це призводить до зменшення опору бази, а відповідно при фіксованому значенні струму емітера i_e напруга $u_{еб}$ зменшується.

Активному режиму роботи транзистора відповідають ділянки вихідних ВАХ, розташовані в першому квадранті, де спостерігається лише незначна залежність струму колектора I_k від колекторної напруги, викликана модуляцією ширини бази. При цьому значення колекторного струму I_k значно залежить від струму емітера I_e .

Змінюючи в невеликих межах напругу $u_{еб}$, можна значно змінювати струм емітера I_e , а відповідно і струм колектора I_k , тобто керувати великою потужністю у вихідному колі, витрачаючи порівняно невелику потужність у вхідному колі емітер-база. В цьому і проявляються підсилюючі властивості біполярного транзистора.

Схеми, у яких використовуються транзистори, аналізуються на постійному та змінному струмі окремо. При аналізі на постійному струмі біполярний транзистор представляється у вигляді нелінійної фізичної моделі Еберса-Мола, а при аналізі на змінному струмі, коли транзистор працює в активному режимі, – у вигляді малосигнальної еквівалентної схеми (рис. 3.23).

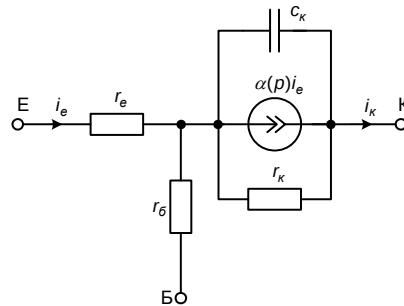


Рисунок 3.23 - Малосигнальна еквівалентна схема біполярного транзистора

В даній схемі $r_e = \varphi_T / I_e \approx 0,025 / I_e$ – диференційний опір відкритого емітерного переходу; r_6 – сума опорів активної та пасивної області бази; C_k – бар’ерна ємність колекторного переходу; r_k – диференційний опір закритого колекторного переходу, що моделює вплив $U_{кб}$ на струм I_k через ефект модуляції ширини бази. Залежне джерело струму моделює процес керування колекторним струмом I_k зі сторони струму емітера I_e . Залежність коефіцієнту передачі за струмом α від частоти $p = j\omega$ зумовлена тим, що переміщення носіїв заряду через базу проходить не миттєво:

$$\alpha(p) = \frac{\alpha}{1 + p/\omega_\alpha}$$

де ω_α – частота, на якій α зменшується в $\sqrt{2}$ раз.

3.10 Польовий МДН-транзистор

Польові МДН-транзистори (з ізолюваним затвором) діляться на транзистори з вбудованим та індукованим каналом. Структура МДН-транзистора (М-метал; Д-діелектрик; Н-напівпровідник) з вбудованим каналом представляє собою підложку з напівпровідника n - або p -типу, в яку вбудовується канал з напівпровідника іншого типу провідності (рис. 3.24). Напівпровідниковий канал відокремлений від металевого затвору тонким шаром діелектрика. До каналу через області з підвищеною концентрацією домішок приєднані металеві виводи, що називаються стоком (С) та истоком (І). Напівпровідникова підложка, ізолювана від зовнішнього середовища діелектриком SiO_2 , також має металевий вивід (П), який зазвичай з’єднаний з истоком для того, щоб p - n -перехід між каналом та підложкою був закритий. Це забезпечує ізоляцію каналу від підложки при нормальній полярності U_{ci} .

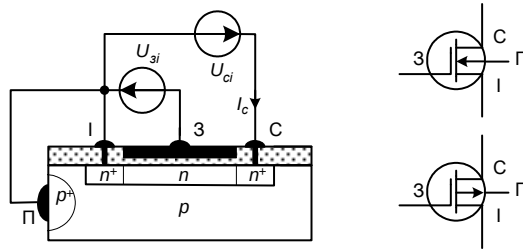


Рисунок 3.24 - Конструкція та умовне позначення МДН - транзистора

Сток-затворні (вхідні) та стокові (вихідні) характеристики МДН-транзистора зображені на рис. 3.25.

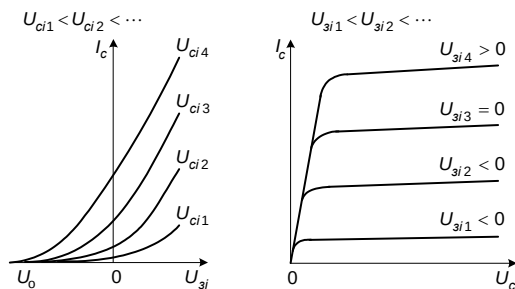


Рисунок 3.25 – Сток-затворні (вхідні) та стокові (вихідні) характеристики МДН-транзистора

У МДН-транзисторів з вбудованим каналом нелінійність стокових характеристик пояснюється тим, що при збільшенні напруги U_{ci} , приєднаного одним своїм кінцем до стоку, а іншим до затвору (через джерело U_{gi}), рухливі носії заряду витісняються з області каналу, розташованої під затвором, в області з підвищеною концентрацією домішок, що приводить до

збільшення опору каналу. Збідніння каналу рухливими носіями заряду, що відбувається при цьому, буде по довжині каналу нерівномірним (найбільшим у стоку). Підвищення по модулю напруги між затвором і джерелом U_{zi} , при зазначеній на рис. 3.25 полярності, також приводить до збідніння каналу, але тільки рівномірному по довжині каналу, тому стокові характеристики при $U_{zi} < 0$ пройдуть нижче щодо характеристики, знятої при $U_{zi} = 0$.

МДН-транзистори з вбудованим каналом можуть працювати й у режимі збагачення при іншій (у порівнянні з показаною на рис. 3.25) полярності напруги U_{zi} . У цьому режимі основні носії заряду (у цьому випадку електрони) під дією поля затвора будуть втягуватися в канал з областей n^+ (p^+ у випадку підложки n -типу), тим самим збагачуючи канал рухливими носіями заряду (яких у каналі при $U_{zi} = 0$ порівняно небагато), тому стокові характеристики в режимі збагачення розташуються вище характеристики, знятої при $U_{zi} = 0$.

Відносно малих приростів напруг, викликаних дією джерела вхідного сигналу, МДН-транзистор можна розглядати як лінійний елемент електричного кола та представляти у вигляді малосигнальної еквівалентної моделі. В моделюючій еквівалентній схемі на рис. 3.26 не показані опори між затвором та каналом, так як їх значення доволі великі. Всі елементи моделюючої схеми – диференціальні, тобто визначені для приростів напруг на струмів.

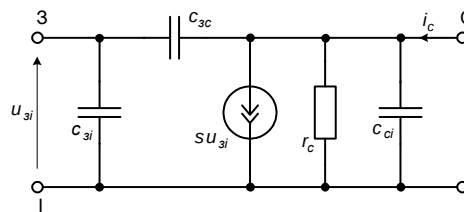


Рисунок 3.26 – Еквівалентна схема заміщення МДН-транзистора

Джерело струму у вихідному колі керується вхідною напругою U_{zi} , при чому ефективність керування залежить від параметру «крутизни»

$$S = \left. \frac{\Delta I_c}{\Delta U_{zi}} \right|_{U_{ci} = \text{const}}$$

Внутрішній опір

$$r_c = \left. \frac{\Delta U_{ci}}{\Delta I_c} \right|_{U_{zi} = \text{const}}$$

на початкових лінійних ділянках стокових характеристик при малих напругах U_{ci} моделює опір матеріалу каналу, а на пологих ділянках – ще і процес збіднення каналу при дією напруги U_{ci} . Ємності C_{zi} та C_{zc} моделюють ємність плоского конденсатора, що утворений металевим затвором та напівпровідниковим каналом. Ємність C_{ci} являється бар'єрною ємністю закритого p - n -переходу між стоком та підложкою.

Тема 4. Математичне моделювання електричних машин постійного струму

4.1 Конструкція машини постійного струму

Призначення. Машини постійного струму застосовують як електродвигуни і генератори. Електродвигуни постійного струму мають хороші регульовальні властивості, значну

перевантажувальну здатність, тому їх широко використовують для приводу раз-особистих механізмів в чорній металургії - прокатні стани, кантувателі, роликові транспортери, на транспорті - електровози, тепловози, електропоїзди, електромобілі, у вантажопідйомних і землерийних пристроях - крани, шахтні підйомники, екскаватори, на морських і річкових суднах, в металообробній, паперовій, текстильній, поліграфіч-ській промисловості. Двигуни невеликої потужності застосовують у багатьох системах ав-тики.

Генератори постійного струму раніше широко використовувалися для живлення електро-двигунів постійного струму в стаціонарних і пересувних установках, а також як джерела електроенергії для заряду акумуляторних батарей, живлення електролізних і гальваніче-ських ванн, для електропостачання різних електричних споживачів на автомобілях, літаках, електро-возах і тепловозах.

Пристрій. На рис. 4.1 показано пристрій машини постійного струму. Вона має дві основні частини: нерухому - статор і обертову - якір, розділені повітряним зазором.

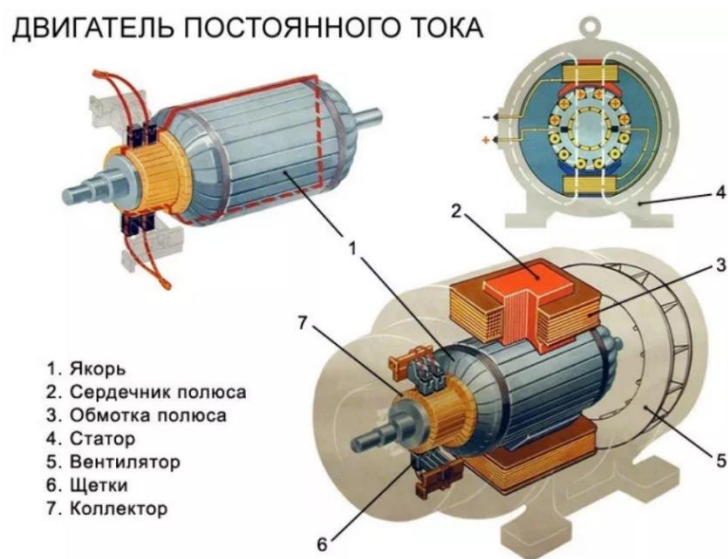


Рисунок 4.1 – Конструкція машини постійного струму

Статор складається з станини, внутрішня поверхня якої служить для кріплення головних полюсів 7 з котушкою обмотки збудження 8 і підшипникових щитів 2. Крім того, станина служить магнітопроводом, через який замикається основний магнітний потік машини.

Якір машини складається з сердечника 6, обмотки 10 і колектора 4. Сердечник виконан у вигляді циліндра з штампованих листів електротехнічної сталі товщиною 0,35 або 0,5 мм. Листи ізолювані один від одного лаковим покриттям і зібрані в загальний пакет, який насаджений на вал якоря. Обмотка якоря з мідного дроту круглого або прямокутного перерізу утворює замкнуту систему провідників, укладених на осерді якоря і приєднаних до колектора.

Колектор 4 машини виготовлений з ізолюваних один від одного пластин холоднотягнутої міді, до яких припаяні дроти обмотки якоря.

За допомогою щіток 5 здійснюється зняття напруги з якоря або подача струму в якір машини. Щітки у вигляді прямокутних брусків з графіту кріпляться в щіткотримачів і для безперебійної роботи електричної машини повинні мати щільний контакт з колектором.

4.2 Принцип дії машин постійного струму

Машина постійного струму має обмотку збудження, розташовану на явно виражених полюсах статора 3 цієї обмотці проходить постійний струм I_b , який створює магнітне поле

збудження Фв. На роторі розташована двошарова обмотка, в якій при його обертанні індукується ЕРС.

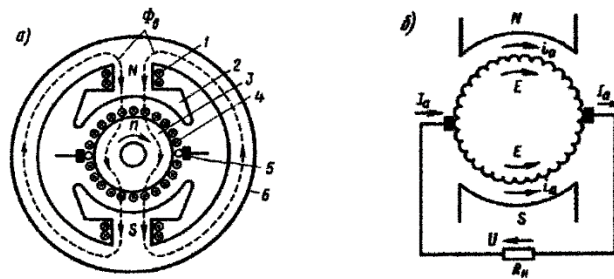


Рис. 2.1. Электромагнитная схема двухполюсной машины постоянного тока (а) и эквивалентная схема сѐ обмотки якоря (б):
1 - обмотка возбуждения; 2- главные полюсы; 3- якорь;
4- обмотка якоря; 5 - щѐтки; 6 - станина

Рисунок 4.2 -

При заданому напрямку обертання якоря напрямок ЕРС, індукованої в його провідниках, залежить тільки від того, під яким полюсом знаходиться провідник. Тому у всіх провідниках, розташованих під одним плюсом, напрямок ЕРС однаковий і зберігається таким незалежно від частоти обертання. Іншими словами, характер, відображаючий напрямок ЕРС, нерухомий в часі: в провідниках, розташованих вище горизонтальним осі симетрії, яка розділяє полюси (геометрична нейтраль), ЕРС завжди спрямована в одну сторону, в провідниках, що лежать нижче геометричної нейтралі, ЕРС направлена в протилежну сторону.

При обертанні якоря провідники обмотки переміщуються від одного полюса до іншого, ЕРС, індукована в них, змінює знак, тобто у кожному провіднику наводиться змінна ЕРС. Однак кількість провідників, які перебувають під кожним полюсом, залишається незмінним. При цьому сумарна ЕРС, індукована в провідниках, що знаходяться під одним полюсом, також незмінна у напрямку і приблизно постійна за величиною. Ця ЕРС знімається з обмотки якоря за допомогою ковзного контакту, включеного між обмоткою і зовнішнім колом.

Обмотка якоря виконується замкнутої, симетричною. При відсутності зовнішнього навантаження струм по обмотці не проходить, так як ЕРС, індуковані в різних частинах обмотки, взаємно компенсуються.

При підключенні до щіток опору навантаження R_H через обмотку якоря проходить постійний струм I_a , напрямок якого визначається напрямом ЕРС E . В обмотці якоря струм I_a розгалужується і проходить по двох паралельних гілок (струми I_a).

Якщо щітки, які здійснюють ковзний контакт з обмоткою якоря, розташувати на геометричній нейтралі, то при відсутності зовнішнього навантаження до щіток прикладається напруга U , рівне ЕРС E , індукованої в кожній з половин обмоток, якщо ж щітки зміщувати з нейтралі, то напруга буде зменшуватись. Продемонструємо це на прикладі, розглянемо дво-полюсну машину, обмотка якої складається з восьми провідників (рис. 4.3).

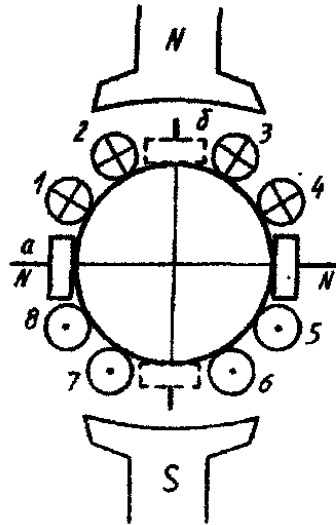


Рисунок 4.3 – Схема двохполюсної машини з восьмипровідниковою обмоткою

Якщо щітки розташовані на геометричній нейтралі (рис. 4.3, положення а), то в кожній з двох паралельних гілок ЕРС провідників спрямовані в одну сторону і напруга дорівнює ЕРС кожної з половин обмоток (рис. 4.4, а). Якщо щітки зміщувати з нейтралі, то ЕРС, індуковані в різних частинах обмотки, будуть взаємно компенсувати один одного, що і призведе до зменшення напруги. І коли щітки розташовані точно під полюсами (рис. 4.3, положення б), напруга дорівнює нулю, так як ЕРС різних частин обмоток повністю компенсують один одного (рис. 4.4, б).

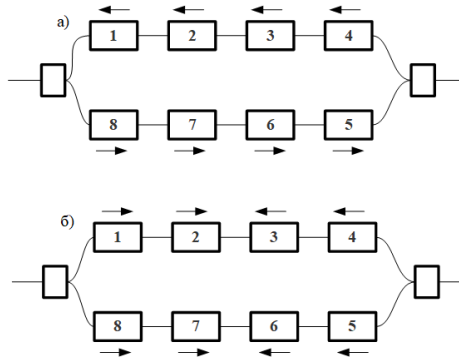


Рисунок 4.4 – Схема напрямків ЕРС в провідниках обмотки при різних положеннях щіток колектора

Для забезпечення надійного токос'єма щітки ковзають не по провідниках обмотки якоря (як це було на початку розвитку електромашинобудування), а по колектору, що виконується у вигляді циліндра, який набирається з мідних пластин, ізолюваних

одна від одної. До кожної пари сусідніх колекторних пластин приєднують частину обмотки якоря, що складається з одного або декількох витків; цю частину називають секцією обмотки якоря.

Якщо машина працює в генераторному режимі, то колектор разом зі легкими по його поверхні щітками є випрямлячем. У руховому режимі, коли до якоря підводиться харчування від джерела постійного струму і він перетворює електричну енергію в механічну, колектор зі щітками можна розглядати як перетворювач частоти, що зв'язує мережу постійного струму з обмоткою, по провідникам якої проходить змінний струм.

Таким чином, головною особливістю машини постійного струму є наявність колектора і ковзаючого контакту між обмоткою якоря і зовнішнім електричним колом.

4.2 Теоретична математична модель машини постійного струму

4.2.1 Загальні положення та допущення

Для дослідження статичних і динамічних режимів роботи електроприводів з електричними машинами постійного струму (МПС) необхідно скласти математичну модель у формі системи диференціальних рівнянь або у вигляді передатних функцій. Взагалі, опис об'єкта у вигляді системи диференціальних рівнянь є найбільш загальним, тому що з нього, як окремий випадок, можна одержати рівняння для статичних режимів, прирівнявши похідні функцій до нуля.

Математична модель електричної машини (ЕМ) будь-якого типу складається з рівнянь електричної рівноваги всіх контурів ЕМ та рівняння руху ротора.

Розглянемо принципову схему (рис.4.5, а) і схему заміщення ДПС (рис.4.5, б).

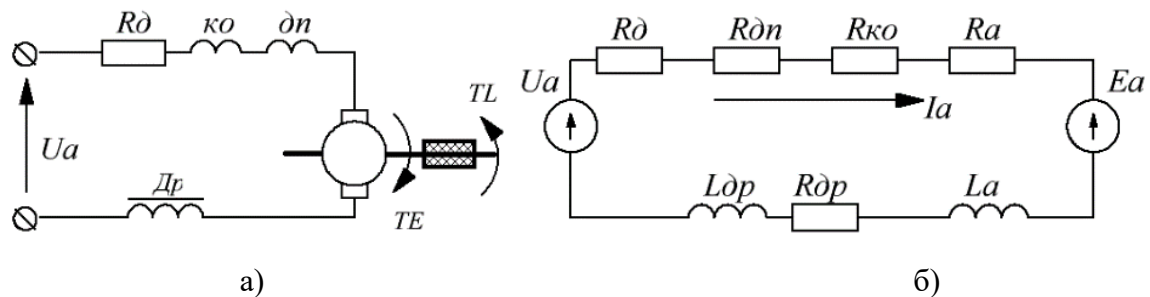


Рисунок 4.5 - Схеми двигуна постійного струму:
принципова а) та схема заміщення б)

Найбільші проблеми виникають при моделюванні Е.Р.С. обертання. Розглянемо її формування. Відомо, що $E_{об} = k\phi \cdot \omega$, де k - коефіцієнт пропорційності, ϕ - потік у зазорі ЕМ, ω - кутова швидкість. У загальному випадку магнітний потік МПС не залишається незмінним. Магнітний потік залежить від струму збудження, але навіть при постійному значенні струму збудження $I_{зб} = const$ магнітний потік не залишається постійним $\phi \neq const$ через вплив реакції якоря. Реакцією якоря називається явище впливу струму в силовому колі на величину магнітного потоку в ЕМ.

Оскільки потік дорівнює $\phi = \phi_{зб} - \Delta\phi_{ря}$, причому $\Delta\phi_{ря} = f(I_{я})$, то при моделюванні МПС із регульованим магнітним потоком виникає необхідність врахування динамічних властивостей обмотки збудження (ОЗ) і нелінійної залежності магнітного потоку ОЗ від струму в ній, що задається кривою намагнічування (рис.4.6).

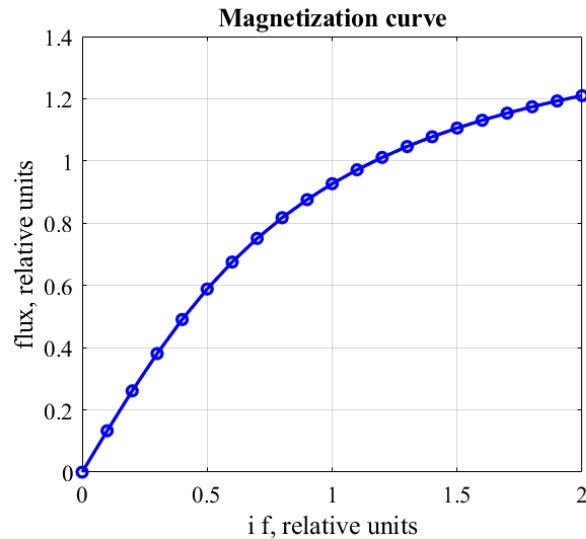


Рисунок 4.6 - Типова крива намагнічування у відносних одиницях

Для машин одного типу крива намагнічування наводиться в даних каталогу у відносних одиницях. Тому, знаючи номінальні значення $I_{зб.н.}$, E_n , $k\phi_n$ можна перебудувати криву для даного конкретного двигуна. Крім насичення ЕМ по контуру основного магнітного потоку, іноді необхідно враховувати насичення по контуру потоку розсіювання. Індуктивність якоря визначається двома складовими

$$L_{я} = L_a - L_s, \quad (4.1)$$

що відповідають основному магнітному полю і полю розсіювання, зчепленому з якірною обмоткою. Значення L_s залежить від величини струму якоря $L_s = f(I_{я})$. Насичення по контуру розсіювання проявляється при значних струмах якоря, порядку $(5 \div 7)I_n$ і полягає в зменшенні величини L_s . Якщо здійснювати заходи для обмеження пускового струму на рівні $(2 \div 2.5)I_n$, це явище можна не враховувати. Подібний вплив на динамічні параметри ЕМ чинять вихрові струми і явища комутації. Усі перераховані фактори за певних умов можуть проявлятися, тому необхідно заздалегідь визначитися з їх якісним і кількісним впливом. У номінальних режимах цими факторами нехтують і кажуть, що прийняті наступні основні припущення:

- струм збудження має сталі значення;
- нехтуємо значенням насичення як по контуру основного магнітного потоку, так і по контуру розсіювання;
- не враховуємо вплив контуру вихрових струмів;
- машина цілком скомпенсована, тобто вплив реакції якоря відсутній.

4.2.2 Система диференціальних рівнянь двигуна постійного струму

З урахуванням припущень, сформульованих вище, вважаємо, що всі параметри схеми заміщення сталі і $k\phi = const$. Система рівнянь довільного електромеханічного перетворювача [Копылов], складається з рівнянь електричної рівноваги усіх контурів електричної машини та рівняння руху рухомої частини.

Зі схеми заміщення ДПС рис. 4.5, б, отримаємо рівняння електричної рівноваги якірного кола за 2-м законом Кірхгофа:

$$U_{\text{я}} = k\phi \cdot \omega + I_{\text{я}} R_{\Sigma} + L_{\Sigma} \frac{dI_{\text{я}}}{dt}, \quad (4.2)$$

Рівняння руху електропривода отримаємо на основі закону збереження імпульсу, яке за умови сталого моменту інерції електроприводу трансформується у рівняння закону Ньютона, який для обертального руху надається у вигляді:

$$J \frac{d\omega}{dt} = k\phi \cdot I_{\text{я}} - M_c. \quad (4.3)$$

Або в канонічній формі:

$$L_{\Sigma} \frac{dI_{\text{я}}}{dt} = U_{\text{я}} - k\phi \cdot \omega - I_{\text{я}} R_{\Sigma}; \quad (4.4)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = k\phi \cdot I_{\text{я}} - M_c.$$

Таким чином система диференціальних рівнянь ДПС незалежного збудження, з урахуванням наведених вище обмежень, є системою звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Така система рівнянь ДПС допускає аналітичне рішення, з яким читач може ознайомитися у [Чиликин].

Оскільки машина постійного струму допускає двонаправлене взаємне перетворення електричної та механічної енергії, то перехідні процеси при роботі ДПС можуть мати коливальний характер, а робота ДПС в кінцевому підсумку має багато спільного з роботою коливального RLC-контур.

4.2.3 Структурна схема ДПС незалежного збудження

Для використання елементів теорії автоматичного керування або при використанні математичних програм структурного моделювання необхідно визначити передавальну функцію ДПС та побудувати його структурну схему, яка б враховувала основні особливості роботи.

Розділимо рівняння електричної рівноваги на R_{Σ} і введемо позначення електромагнітної сталої часу:

$$T_e = \frac{L_{\Sigma}}{R_{\Sigma}}. \quad (4.6)$$

Тоді

$$\frac{L_{\Sigma}}{R_{\Sigma}} \frac{dI_{\text{я}}}{dt} = \frac{U_{\text{я}} - k\phi \cdot \omega}{R_{\Sigma}} - I_{\text{я}}, \quad (4.7)$$

або в операторній формі:

$$(T_e p + 1) = \frac{1}{R_{\Sigma}} (U_{\text{я}} - k\phi \cdot \omega). \quad (4.8)$$

Поклавши коефіцієнт передачі - $k_d = \frac{1}{R_{\Sigma}}$, одержимо передаточну функцію за струмом у вигляді аперіодичної ланки:

$$W_I(p) = \frac{I(p)}{U(p) - k\phi \cdot \omega(p)} = \frac{k_d}{T_e p + 1}. \quad (4.9)$$

Записавши в операторній формі основне рівняння динаміки отримаємо передаточну функцію за швидкістю - передаточну функцію інтегруючої ланки:

$$W_{\omega}(p) = \frac{\omega(p)}{M(p) - M_c(p)} = \frac{I}{Jp} \quad (4.10)$$

З урахуванням виразів $E = k\phi \cdot \omega$ і $M = k\phi \cdot I$ складемо структурну схему у вигляді, що наведено на рис.4.7.

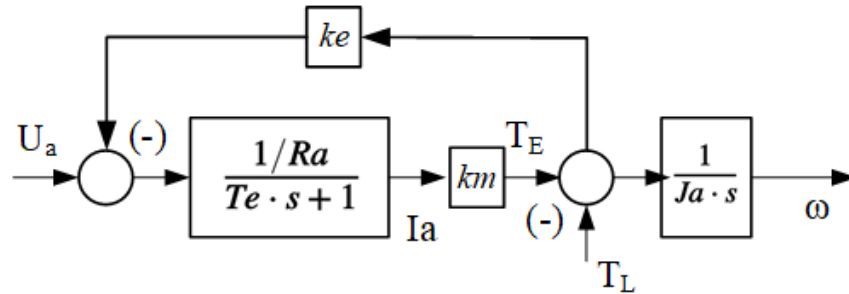


Рисунок 4.7 – Структурна схема двигуна постійного струму незалежного збудження

4.3 Математичні моделі ДПС при зміні магнітного потоку

Але при дослідженні параметри МПС можуть змінюватися і система рівнянь стає нелінійною. Наприклад, у випадку, коли регулювання швидкості забезпечується змінюванням величини магнітного потоку з урахуванням кривої намагнічування. При чисельному розв'язанні системи диференціальних рівнянь зміна параметрів моделі може бути легко врахована додаванням необхідних диференціальних або алгебраїчних рівнянь.

4.3.1. Двигун постійного струму з послідовним збудженням

Розглянемо ДПС послідовного збудження (ДПС ПЗ). Конструктивна особливість двигуна полягає в тому, що магнітний потік є функцією струму якоря $\phi = f(I_a)$, причому ця залежність нелінійна (рис.4.6).

Система диференціальних рівнянь ДПС ПЗ набуває вигляду:

$$\begin{cases} L_{\Sigma} \frac{dI_a}{dt} = U_a - k\phi \cdot \omega - I_a R_{\Sigma}; \\ J \frac{d\omega}{dt} = k\phi \cdot I_a - M_c; \\ k\phi = f(I_a). \end{cases} \quad (4.11)$$

У модель додається одне нелінійне алгебраїчне рівняння.

Тепер структурна схема моделі має вигляд (рис.4.8).

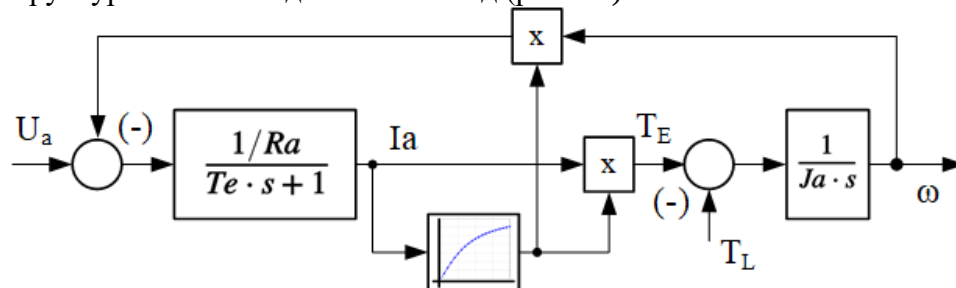


Рисунок 4.8 – Структурна схема ДПС послідовного збудження

4.3.2. Двигун постійного струму зі змішаним збудженням

Система рівнянь для ДПС змішаного збудження (ДПС 33) аналогічна системі диференціальних рівнянь для ДПС ПЗ, за винятком того, що

$$k\phi = k\phi_{ш} \pm f(I_{я}), \quad (4.12)$$

де $k\phi_{ш}$ - коефіцієнт потоку від шунтової (незалежної) обмотки збудження.

Структурна схема ДПС 33 показана на рис. 4.9.

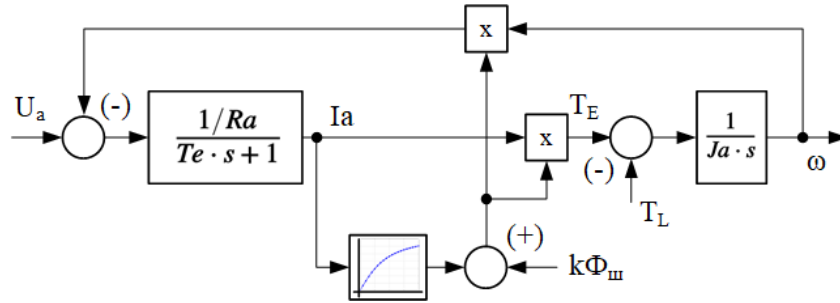


Рисунок 4.9 – Структурна схема ДПС змішаного збудження

4.3.3. Двигун постійного струму з урахуванням реакції якоря

Раніше вказувалося, що такі особливості машини, як реакція якоря, вплив вихрових струмів та ін., у номінальних режимах не проявляються і ними можна знехтувати. Однак використання отриманої структурної схеми дозволяє легко врахувати ці та інші характерні риси фізичної картини процесів перетворення електричної енергії в механічну.

Розглянемо роботу МПС з урахуванням реакції якоря.

Враховуючи, що реакція якоря виявляється в зміні магнітного поля машини при зміні струму якоря, то повний магнітний потік:

$$\phi_{\Sigma} = \phi_{зб} - \Delta\phi_{ря} = \phi_{зб} - f(I_{я}), \quad (4.13)$$

де $\phi_{зб}$ - потік, обумовлений дією струму збудження, $\Delta\phi_{ря}$ - потік реакції якоря.

Графік $\Delta\phi_{ря} = f(I_{я})$ має орієнтовно такий вигляд (рис.4.10):

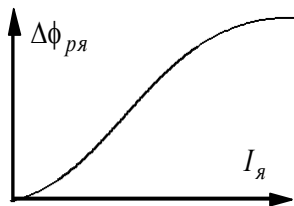


Рисунок 4.10 – Графік залежності

$$\Delta\phi_{ря} = f(I_{я})$$

Система диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \Delta\phi_{ря} = f(I_{я}); \\ \phi = \phi_{зб} - \Delta\phi_{ря}; \\ L_{\Sigma} \frac{dI_{я}}{dt} = U_{я} - k\phi \cdot \omega - I_{я} R_{\Sigma}; \\ J \frac{d\omega}{dt} = k\phi \cdot I - M_c. \end{cases}$$

(4.14)

Структурна схема ДПС з урахуванням дії реакції якоря зображена на рис.4.11:

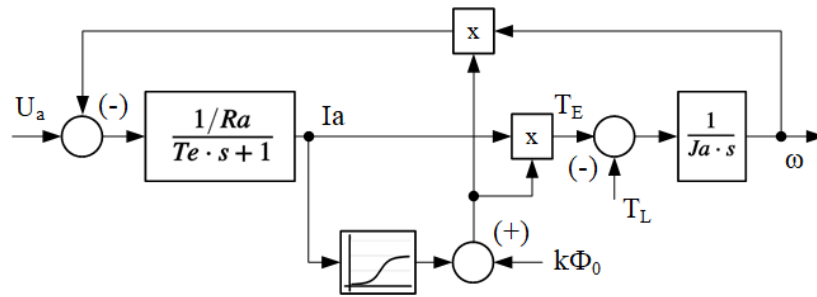


Рисунок 4.11 – Структурна схема ДПС незалежного збудження з урахуванням реакції якоря

Для двигуна постійного струму послідовного збудження з урахуванням реакції якоря структурна схема подана на рис.4.12. Пунктирною стрілкою показано як врахувати, наприклад, що крім послідовної обмотки збудження є і паралельна (шунтова) обмотка.

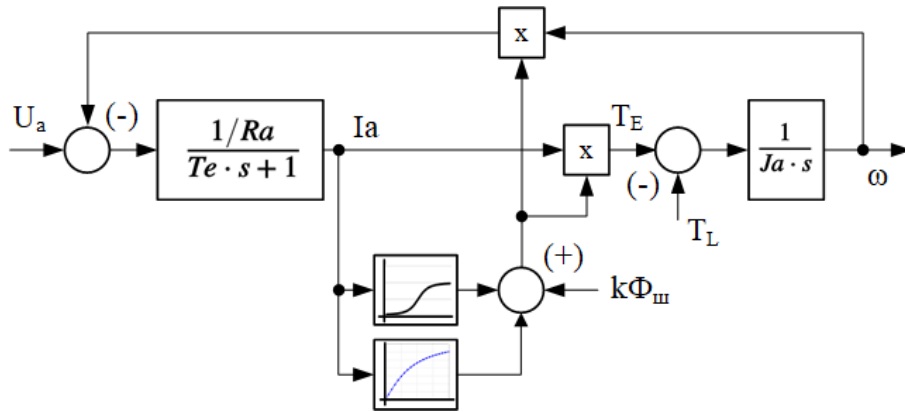


Рисунок 4.12 - Структурна схема ДПС змішаного збудження з урахуванням реакції якоря

4.3.4 Моделювання ДПС при регулюванні магнітного потоку

Розглянемо особливості моделювання ДПС при регулюванні струму збудження і магнітного потоку.

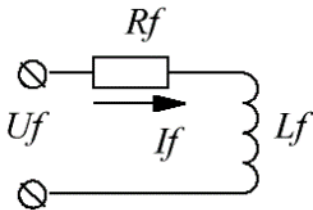


Рисунок 4.13 - Принципова схема кола обмотки збудження

Схема вмикання обмотки збудження показана на рис.4.13. За відсутності реакції якоря рівняння електричної рівноваги

ОЗ:

$$L_{\text{зб}} \frac{dI_{\text{зб}}}{dt} = U_{\text{зб}} - I_{\text{зб}} R_{\text{зб}}. \quad (4.15)$$

На структурній схемі ОЗ зображується у вигляді аперіодичної ланки.

Магнітний потік ϕ змінюється відповідно до кривої намаг-

нічування $\phi = f(I_{\text{зб}})$.

Система диференціальних рівнянь при регулюванні струму збудження буде мати вигляд (4.16).

$$\begin{cases} L_{\Sigma} \frac{dI_a}{dt} = U_a - k\phi \cdot \omega - I_a R_{\Sigma}; \\ J \frac{d\omega}{dt} = k\phi \cdot I - M_c; \\ L_{3\phi} \frac{dI_{3\phi}}{dt} = U_{3\phi} - I_{3\phi} R_{3\phi}; \\ k\phi = f(I_{3\phi}). \end{cases} \quad (4.16)$$

Структурна схема, що відповідає даній системі рівнянь, наведена на рис 4.14.

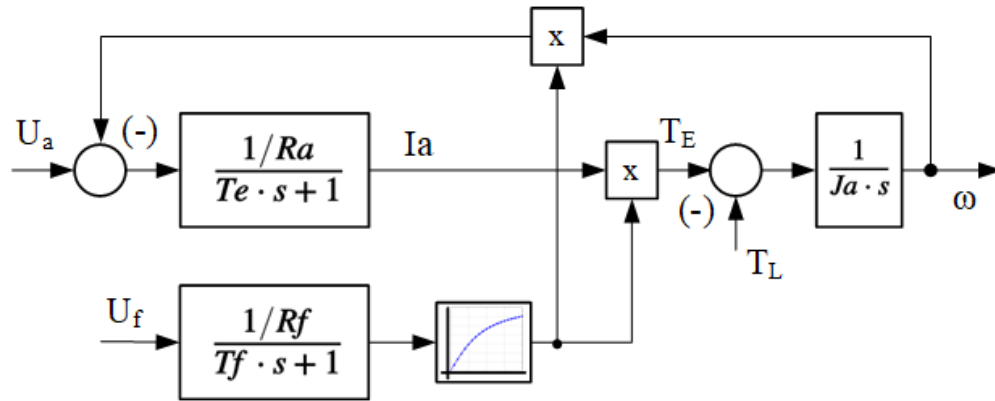


Рисунок 4.14 – Структурна схема ДПС незалежного збудження з урахуванням обмотки збудження

4.4. Математичне моделювання генераторів постійного струму

При обертанні генератора в обмотці якоря (рис.4.15) наводиться Е.Р.С. обертання: $E_z = k\phi_z \omega_z$.

Магнітний потік ϕ залежить від струму збудження $I_{3\phi}$ при постійній швидкості ω_z . Модель ОЗ розглянута вище і залишається без змін і для двигуна. У цих умовах ГПС відрізняється наступною системою рівнянь:

$$E_z = f(I_{3\phi});$$

$$L_{3\phi} \frac{dI_{3\phi}}{dt} = U_{3\phi} - I_{3\phi} R_{3\phi}. \quad (4.17)$$

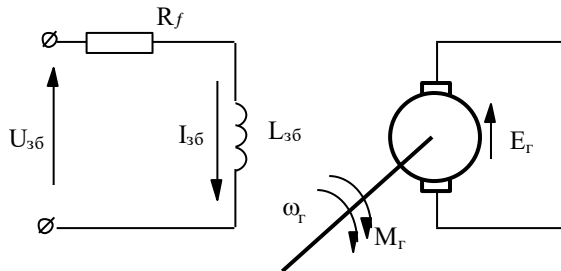


Рисунок 4.15 – Принципова схема пвжключення ГПС

Необхідно брати до уваги, що Е.Р.С. ГПС може змінювати знак (що для двигунів недопустимо), тому крива намагнічування симетрична в I і III квадрантах.

Структурна схема ГПС в електроприводі за системою Г-Д, при умові, що $\omega_z = const$, наведена на рис.4.16:

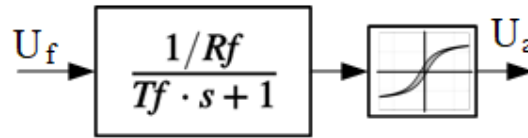


Рисунок 4.16 – Структурна схема формування вихідної напруги генератора постійного струму

4.5 Приклади реалізації математичних моделей ДПС

4.5.1 Прогнозування параметрів ДПС за каталожними даними

В каталозі виробників наводиться обмежена інформація про характеристики ДПС.

Як правило, виробник обмежується наступними даними:

Тип двигуна:

- Номінальна потужність на валу, кВт;
- Номінальна частота обертів, об/мин;
- Номінальна напруга якоря, В;
- Номінальний струм якоря, А;
- Номінальний к.к.д, %.

За допомогою цих даних необхідно визначити параметри ДПС, що входять до рівнянь математичної моделі.

Активний опір якорної обмотки:

$$R = \alpha \frac{U_n}{I_n} \left(\frac{1 - \eta_n}{\eta_n} \right), \quad (4.23)$$

де $\alpha = 0.3 \div 0.5$ для двигунів постійного струму незалежного збудження; $\alpha = 0.6$ - для двигунів постійного струму змішаного збудження; $\alpha = 0.75$ для двигунів постійного струму послідовного збудження.

Індуктивність обмотки якоря визначається відповідно до формули Уманського:

$$L_{\text{я}} = k \frac{U_n}{I_n} \frac{60}{2\pi p n_n} = k \frac{U_n}{I_n} \frac{1}{p \omega_n}, \quad (4.24)$$

де $k = 0.2 \div 0.25$ - для компенсованих машин; $k = 0.5 \div 0.6$ - для некомпенсованих машин.

Сталу часу обмотки збудження можна визначити за формулою Жюільєра:

$$T_{\text{зб}} = \sqrt{\frac{P_n \cdot 10^3 \pi}{30 \omega_n (2p)^2}} \quad (4.25)$$

Для генераторів, співвідношення між потужністю і величиною сталої часу обмотки збудження наведене в табл. 4.1.

Співвідношення між моментом інерції та номінальною потужністю (номінальним моментом) двигуна може бути визначено за наступними формулами.

$$\text{Для машини постійного струму} \quad J = 1.5 \cdot 10^{-4} (M_n)^{1.5},$$

$$\text{або } J = (0.55 \div 0.65) D_2^4 (l_2 + 0.3 D_2 + 0.75 P_n) \cdot 10^{-2}.$$

Для асинхронних машин
$$J = 8750 \frac{P_n}{(n_n)^2};$$

або

для асинхронних двигунів з короткозамкненим ротором

$$J_{кз} = (0.55 \div 0.65) D_2^4 \cdot l_2 \cdot 10^{-2};$$

для асинхронних двигунів з фазним ротором

$$J_{фр} = 1.05 \cdot J_{кз}.$$

для синхронних машин
$$J = 20500 \frac{(P_n)^{1.26}}{(n_n)^2},$$

де D_2 та l_2 - діаметр та довжина ротора, мм.

Таблиця 4.1. Співвідношення між потужністю і величиною сталої часу обмотки збудження генераторів постійного струму

$T_{зб}$, с	0.5 - 1	1 - 2	2 - 5
P_n , кВт	10 - 100	100 - 1000	1000 - 5000

Наведемо приклад визначення параметрів схеми заміщення двигуна підйомної установки типу ПБК–340/65 за каталожними даними.

Таблиця 1 – Каталожні данні двигуна типу ПБК–340/65

Назва величини	Числове значення
Номінальна потужність двигуна на валу P_n , кВт	1300
Номінальна напруга U_n , В	900
Номінальний струм двигуна I_n , А	1650
Номінальна частота обертів ω_n , об/хв	38
Номінальний ккд e_n	0.875

Наведемо алгоритм визначення параметрів схеми заміщення ДПС. Номінальна кутова швидкість ДПС:

$$\omega_n = \frac{pi - n_n}{30} = \frac{3.14 - 38}{30} = 3.9794 \text{ рад/с}$$

Активний опір якірного кола:

$$R_a = \frac{0.5 \cdot (1 - e_n) \cdot U_n}{I_n \cdot e_n} = \frac{0.5 \cdot (1 - 0.875) \cdot 900}{1650 \cdot 0.875} = 0.039 \text{ Ом}$$

Індуктивність розсіювання якірного кола двигуна:

$$L_a = \frac{0.3 \cdot U_n}{\omega_n \cdot I_n \cdot p} = \frac{0.3 \cdot 900}{3.9794 \cdot 1650 \cdot 15} = 0.0027 \text{ Гн}$$

Коефіцієнт ЕРС.

$$k_e = \frac{U_n - I_n \cdot R_a}{\omega_n} = \frac{900 - 1650 \cdot 0.039}{3.9794} = 210.0127 \text{ В} \cdot \text{с}$$

Номинальний обертовий момент ДПС:

$$M_n = \frac{1000 \cdot P_n}{\omega_n} = \frac{1000 \cdot 1300 \cdot 10^3}{3.9794} = 326690 \text{ Нм}$$

Коефіцієнт моменту:

$$k_m = \frac{M_n}{I_n} = \frac{326690}{1650} = 197.9918 \text{ Нм/А}$$

Момент інерції якоря ДПС:

$$J_a = 0.0015 \cdot M_n^{1.5} = 0.0015 \cdot 326690 = 280080 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Наведемо частину програмного коду на m-мові програмування, яка використовується у MATLAB, що реалізує наведений алгоритм:

Лістинг 1.1.

```
clear;
dctype = 'ПБК-340/65';
Pnom = 1300; % Номінальна потужність, кВт
Unom = 900; % Номінальна напруга, В
Inom = 1650; % Номінальний струм, А
nnom = 38; % Номінальна частота обертів, об/мин
enom = 0.875; % Номінальний ККД, %
wnom = pi*nnom/30;
Ra = 0.5*(1-enom)*Unom/(Inom*enom); % активний опір обмотки якоря, Ом
Rdp = 0; % активний опір додаткових полюсів, Ом
p = 15; % Число пар полюсів якірної обмотки.
La = 0.3*Unom/(wnom*Inom*p); % Індуктивність якірної обмотки, Гн
ke = (Unom - Inom*Ra)/wnom;
Mnom = 1000*Pnom/wnom;
km = Mnom/Inom;
Ja = 0.0015*Mnom^1.5;
```

4.5.2 Реалізація математичної моделі двигуна постійного струму у MATLAB®

MATLAB® надає широкі можливості в галузі математичного моделювання динамічних систем. Тут перш за все потрібно відзначити дві основні можливості:

— функціональне програмування з використанням вбудованого m-мови програмування і широкого набору вбудованих функцій, що реалізують широкий спектр методів обчислювальної математики;

— візуальне програмування із застосуванням програми Simulink, яка дозволяє вирішувати ті ж завдання в більш наочному стилі.

Нижче ми наведемо приклади реалізації математичних моделей машин постійного струму різної конструкції, які використовують перераховані вище підходи і різні бібліотеки Simulink.

4.5.3.1 Реалізація математичної моделі двигуна постійного струму на m-мові програмування з використанням технології live script

Інтегрування звичайних диференціальних рівнянь здійснюється з використанням спеціалізованих вирішувачів - наприклад **ode45** (реалізує метод Рунге-Кутта 4-го порядку з

автоматичним вибором кроку інтегрування). Їх використовують, як для чисельного розв'язання (інтегрування) звичайних диференціальних рівнянь та їх систем.

Відомо, що кожна система звичайних диференціальних рівнянь (ОДУ) може бути представлена як система рівнянь першого порядку в канонічній формі (формі Коші):

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t),$$

де y - вектор змінних стану (фазні змінні системи); t - аргумент (звичайно - час); f - нелінійний вектор-функція змінних стану y и аргументу t .

Виклик процедур- вирішувачів має наступний синтаксис:

`[t, y] = ode23 ('<function name>', tspan, y0, options)`

`[t, y] = ode45 ('<function name>', tspan, y0, options),`

де параметри, що використовуються мають наступні значення: `<function name>` являє собою символьний рядок, що надає ім'я m-функції, яка визначає вектор $f(y, t)$, тобто *розраховує праві частини системи ЗДР*; y_0 - вектор початкових значень змінних; t - масив розрахованих значень аргументу, відповідно шагам інтегрування; y - матриця інтегрування значень фазових змінних, у яких кожний стовбець відповідає одна із змінних стану, а рядок має значення змінних стану, що відповідають кроку інтегрування; **tspan** - це вектор рядка `[t0 tfinal]`, який містить два значення: **t0** - початкове та **tfinal** - кінцеве значення періоду розрахунків; **options** - це рядок параметрів, котрі визначають значення допустимих відносних та абсолютних помилок інтегрування.

Параметр **options** може бути не визначеним. Тоді ще за замовчуванням допустима відносна похибка інтегрування приймається рівною $1 \cdot 10^{-3}$, а абсолютна похибка (для кожної із змінних стану) рівна $1 \cdot 10^{-6}$. Якщо ці значення не підходять користувачу, то перед викликом процедури чисельного інтегрування, повинні бути встановлені нові значення допустимих помилок, використовуючи процедуру **odeset** наступним чином:

`options = odeset ('RelTol', 1e-4, 'AbsTol', [1e-4 1e-4 1e-5]).`

Параметр **RelTol** визначає відносну помилку чисельного інтегрування за всіма фазовим змінним одночасно, а **AbsTol** – є вектор-рядок, що складається з абсолютних допустимих помилок чисельного інтегрування для кожної з фазових змінних.

Функція **ode23** реалізує чисельний метод Рунге-Кутта другого порядку і за допомогою методу третього порядку контролює відносні і абсолютні помилки інтегрування на кожному кроці і змінює величину кроку інтегрування, щоб забезпечити зазначені межі помилок інтеграції.

Функція **ode45** реалізує чисельний метод Рунге-Кутта четвертого порядку, а розмір кроку контролюється методом 5-го порядку.

У MATLAB® також реалізовано значну кількість інших чисельних методів для розв'язання систем ЗДУ.

Повний текст прикладу, який реалізує вирішення рівнянь двигуна постійного струму розташовано у файлі **CD:DC MOTOR/dcmotor_model.mlx**.

Наведемо лістинг функції визначення правих частин системи ЗДР. Останні два рядка цієї процедури реалізують обчислення правих сторін відповідних рівнянь двигуна постійного струму.

```
function dwdt = dcmotor(~, w, Ra, La, Ja, Mc, Ua, ke, km)
% dwdt(1) = right-hand part - the first derivative of the current
% dwdt(3) = right-hand part - the first derivative of the angular velocity
```

```

dwdt=zeros(2,1);
Ia = w(1);
wa = w(2);
dwdt(1) = (Ua-Ia*Ra-ke*wa)/La;
dwdt(2) = (km*Ia - Mc)/Ja;
end

```

Приклад виклику вирішувача системи ЗДР:

```

tspan = [0 2]; % час інтервалу
w0 = [0 0]; % initial values of functions and derivatives
%(~, w, Ra, La, Ja, Mc, Ua, ke, km)
Mc = 0;
[T, W] = ode45(@(t,w)dcmotor(t, w, Ra, La, Ja, Mc, Ua, ke, km),tspan,w0);
% ODE solution

```

На рис. 4.17 зображено отримані графіки процесу пуску ДПС ПБК-340/65 та результати дослідження впливу моменту інерції електроприводу на перехідні процеси пуску двигуна постійного струму.

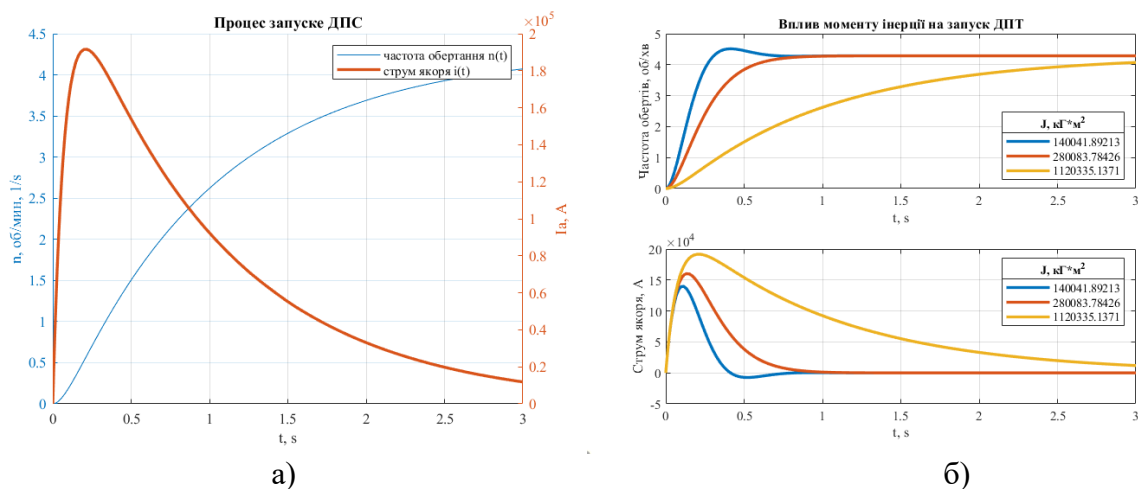


Рисунок 4.17 – Результати математичного моделювання двигуна постійного струму ПБК–340/65: процес пуску а) та дослідження впливу моменту інерції на пускові характеристики б)

4.5.3.2 Реалізація математичної моделі двигуна постійного струму, наданої у формі простору станів

Применим MATLAB/Simulink для моделирования рассмотренной в примере 1 раздела 4.4 системы, представленной в виде ВММ. Реализация модели двигателя постоянного тока в форме пространства состояний изображена на рис. 4.18 Наведена модель розташована у файлі **CD:DC MOTOR/dcmotor_statespace.slx**.

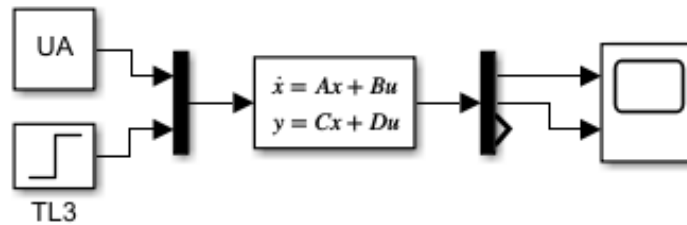


Рисунок 4.18 – Реалізація моделі двигуна постійного струму у формі простору станів

InitFcn – скрипт, в котром создаются и вычисляются матрицы исследуемого объекта, приведен ниже.

```
%% Params
Ua = 200;
R = 0.1;
L = 0.001;
kF = 2;
J = 0.5;
%% State space matrices
A = [0 kF/J 0; -kF/L -R/L 0; 1 0 0];
B = [0 -1/J; 1/L 0; 0 0];
C = [1 0 0; 0 1 0; 0 0 1];
D = [0 0; 0 0; 0 0];
```

Вікно налаштування блоку простору станів та результати математичного моделювання зображено на рис. 4.19

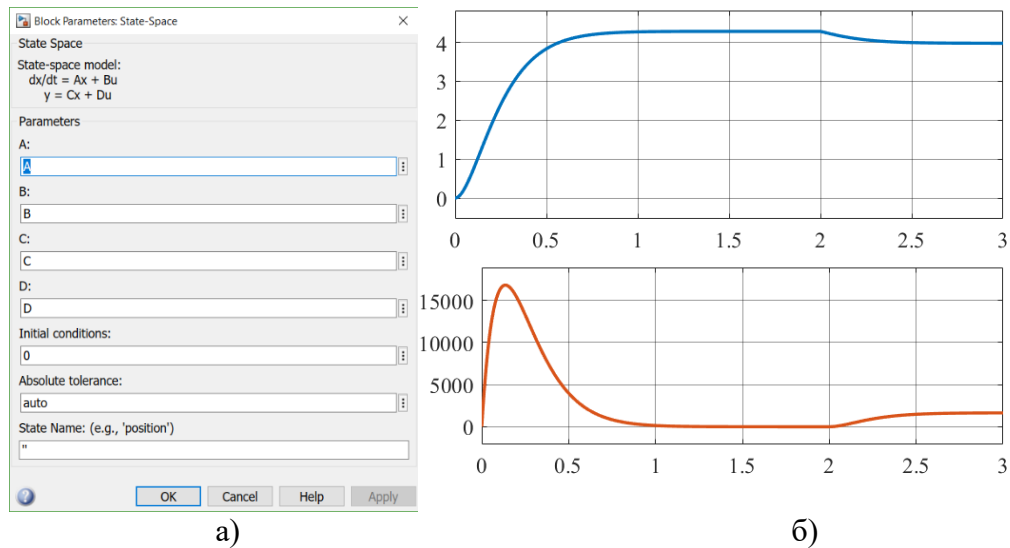


Рисунок 4.19 – Вікно налаштування параметрів блоку простору станів (а) та результати математичного моделювання процесу пуску та збільшення навантаження (б) двигуна постійного струму ПБК–340/65

4.5.3.3 Реалізація математичної моделі двигуна постійного струму візуальними засобами MATLAB®/Simulink

У відповідності до розробленої у розділі 4.1. структурної схеми двигуна постійного струму незалежного збудження, створимо реалізацію моделі двигуна постійного струму з використанням елементів, які належать виключно до бібліотеки Simulink (рис. 4.20).

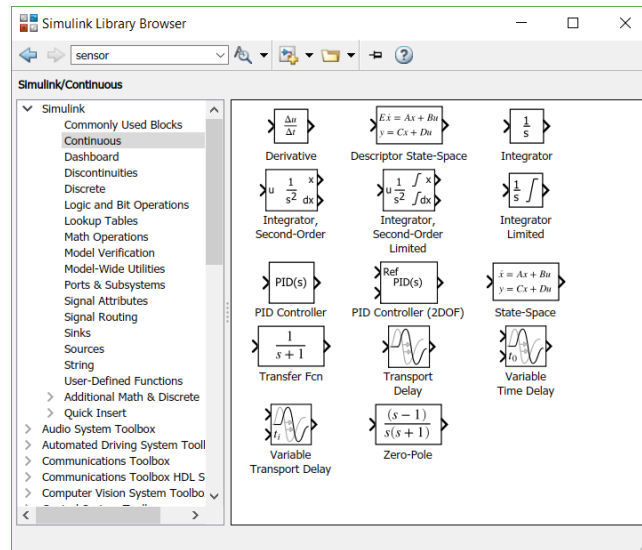


Рисунок 4.20 – Розташування бібліотеки елементів Simulink у Браузері бібліотек.

У запропонованій реалізації було використано джерело константи, блоки підсилення та для моделювання динамічних ланок – блок **Transfer Fcn**. Отримана у результаті модель зображена на рис.4.21. Наведена модель розташована у файлі **CD:DC MOTOR/dcmotor_struct-scheme.slx**.

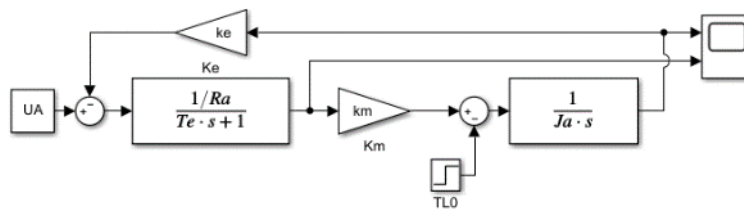


Рисунок 4.21 – Візуальна модель двигуна постійного струму незалежного збудження з використанням елементів бібліотеки Simulink

На рис.4.22 зображено результати математичного моделювання процесу пуску та збільшення навантаження, отримані з розробленої моделі (рис.4.21).

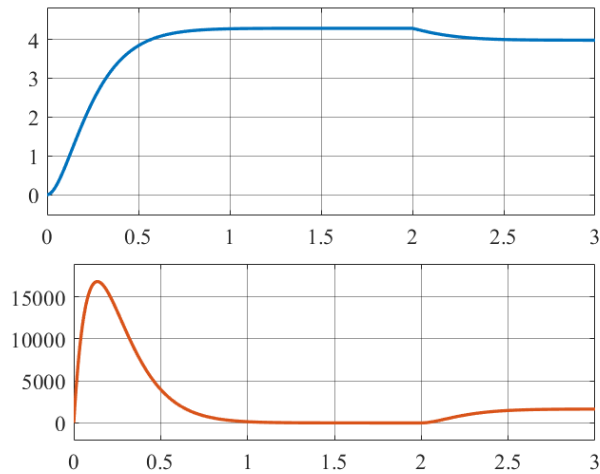


Рисунок 4.22 – Результати математичного моделювання двигуна постійного струму ПБК–340/65, отримані у моделі рис. 4.105

Отримані результати повністю збігаються з результатами, отриманими на моделях ДПС інших різновидів.

4.5.3.4 Реалізація мультифізичної математичної моделі двигуна постійного струму засобами MATLAB®/Simulink/SimPower

Значний інтерес викликають задачі моделювання електродвигунів, які є складовою частиною регульованого електроприводу та промислових комплексів. При цьому виникає потреба математичного моделювання.

Реалізація моделі двигуна постійного струму засобами MATLAB®/Simulink/SimPower зображена на рис. 4.23. Наведена модель розташована у файлі **CD:DC MOTOR/dcmotor_sim-power.slx**.

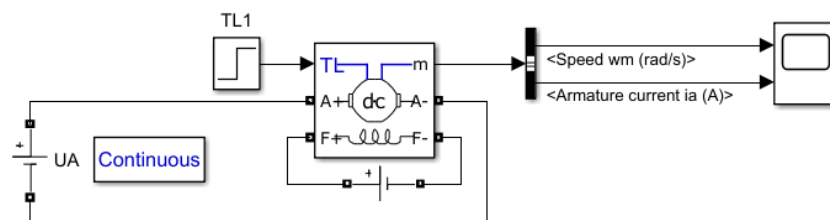


Рисунок 4.23 - Візуальна модель двигуна постійного струму незалежного збудження з використанням елементів бібліотеки Simulink/SimPower

На рис.4.24 зображено результати математичного моделювання процесу пуску та збільшення навантаження, отримані з розробленої моделі (рис.4.23).

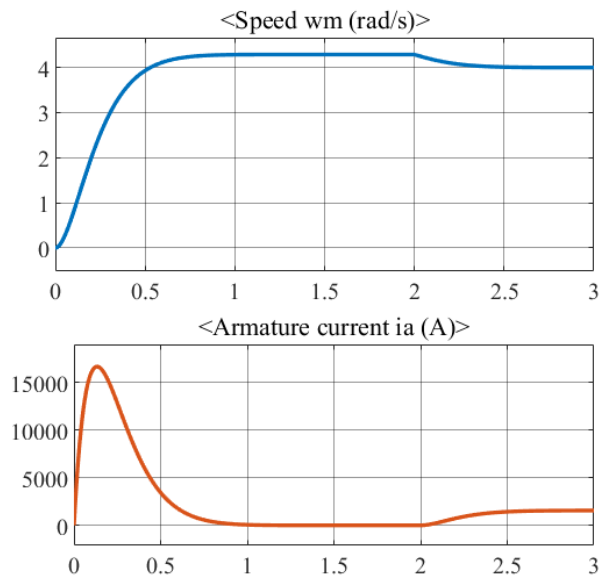


Рисунок 4.24 – Результати математичного моделювання двигуна постійного струму ПБК–340/65, отримані у моделі рис. 4.107

Реалізація моделі двигуна постійного струму засобами MATLAB®/Simulink/SimScape зображена на рис. 4.25. Наведена модель розташована у файлі **CD:DC MOTOR/dcmotor_sim-scape.slx**.

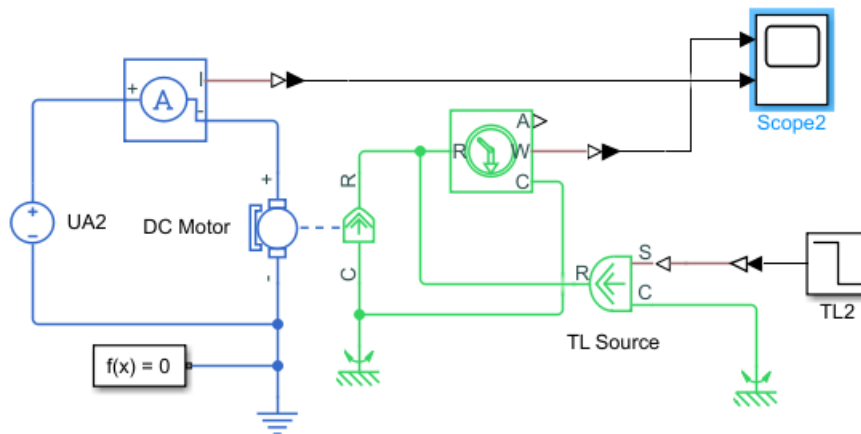


Рисунок 4.25 - Візуальна модель двигуна постійного струму незалежного збудження з використанням елементів бібліотеки Simulink/SimScape

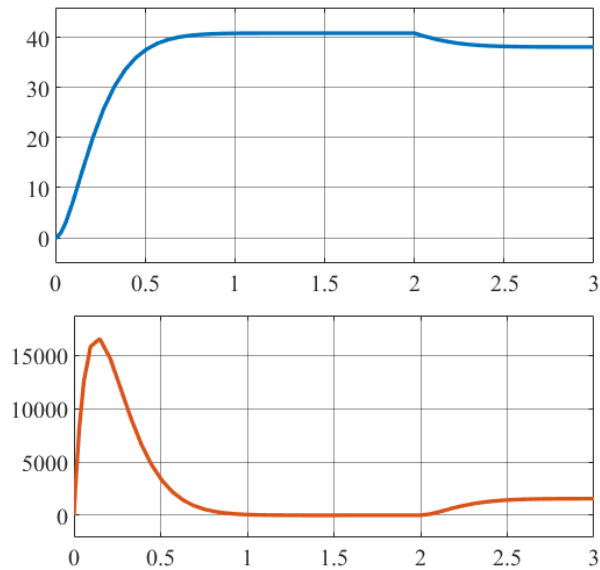


Рисунок 4.26 – Результати математичного моделювання двигуна постійного струму ПБК–340/65, отримані у моделі рис. 4.109

4.5.4 Реалізація математичної моделі двигуна постійного струму послідовного збудження у MATLAB®

У відповідності до розробленої у розділі 4.3.1 структурної схеми двигуна постійного струму незалежного збудження, створимо реалізацію моделі двигуна постійного струму з використанням елементів, які належать виключно до бібліотеки Simulink.

У запропонованій реалізації було використано джерело константи, блоки підсилення та для моделювання динамічних ланок – блок **Transfer Fcn**. Отримана у результаті модель зображена на рис.4.27. Наведена модель розташована у файлі **CD:DC MOTOR/dcmotorseries.slx**.

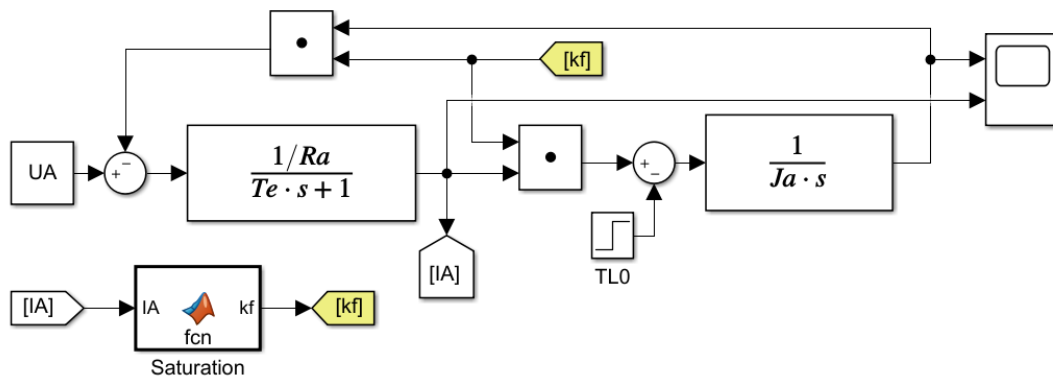


Рисунок 4.27 – Візуальна модель двигуна постійного струму незалежного збудження з використанням елементів бібліотеки Simulink

```

UA = 900;
TLr = 3.2669e5;
Ra = 0.039;
La = 0.0027;
Ja = 2.8008e5;

```

```

ke = 210.0127;
km = 197.9918;
IArated = 1600;
Te = Ia/Ra; Tm = Ja*Ra/(ke*km);

function kf = fcn(IA)
    IArated = 0;
    kf = 0;
    coder.extrinsic('evalin');
    coder.extrinsic('get_param')
    IArated = evalin('base', 'IArated');
    KF = evalin('base', 'ke');
    ia = IA/IArated;
    kf = 0.997*atan(1.34*ia)*KF;
end

```

На рис.4.28 зображено результати математичного моделювання процесу пуску та збільшення навантаження, отримані з розробленої моделі (рис.4.27).

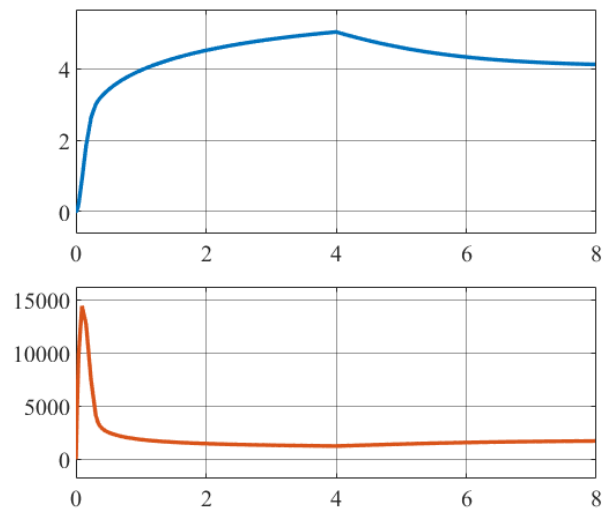


Рисунок 4.28 – Результати математичного моделювання двигуна постійного струму ПБК–340/65

Тема 5. Лінеаризована математична модель асинхронного двигуна

5.1 Розрахунок параметрів асинхронного двигуна за даними каталогу

Одними з найважливіших параметрів, що характеризують номінальний режим АД, є відповідні номінальні значення приведенного струму ротора $I'_{2.n}$ і намагнічуючого струму $I_{\mu.n}$. Оскільки при переході від ідеального холостого ходу ($s = 0$) до номінального режиму ($s = s_n$) магнітний потік практично не змінюється, то $I_{\mu.n}$ можна прийняти рівним струму холостого ходу $I_{\mu.xx}$, що вимірюється при роботі двигуна без навантаження на валу.

Визначимо значення $I'_{2.n}$, $I_{\mu.n}$, використовуючи паспортні дані номінального струму статора $I_{l.n}$, кратність максимального моменту λ_m і номінального коефіцієнта потужності $\cos \varphi_n$.

На базі основних співвідношень і векторної діаграми АД, а також з урахуванням рівнянь для критичного ковзання

$$\frac{s_k}{s_n} = \lambda_m + \sqrt{\lambda_m^2 - 1} \quad (5.1)$$

можна отримати:

$$I'_{2.n} \approx I_{l.n} \cos \varphi_n \sqrt{\frac{2\lambda_m}{\lambda_m + \sqrt{\lambda_m^2 - 1}}} = I_{\mu.n} \cos \varphi_n \sqrt{\frac{2\lambda_m s_n}{s_k}}; \quad (5.2)$$

$$I_{\mu.n} \approx I_{l.n} \left(\sin \varphi_n - \cos \varphi_n \frac{s_n}{s_k} \right). \quad (5.3)$$

При $\lambda_m > 1.7$ можна допустити:

$$I'_{2.n} \approx I_{l.n} \cos \varphi_n, \quad (5.4)$$

оскільки похибка із попередньою формулою не перевищує 5%.

У каталогах, звичайно, приводяться кратності пускового моменту - $\lambda_n = \frac{M_n}{M_n}$, і пускового

струму - $k_i = \frac{I_n}{I_n} = \frac{I_{\kappa 3}}{I_{l.n}}$. За цими і зазначеними вище да-

ними можна визначити відсутні параметри Г-подібної схеми заміщення (рис.5.1).

За кратністю пускового струму знаходимо повний опір двигуна для нерухомого ротора ($s = 1$):

$$Z_{kl} = \frac{U_{l.n}}{\sqrt{3} \cdot k_i \cdot I_{l.n}}. \quad (5.5)$$

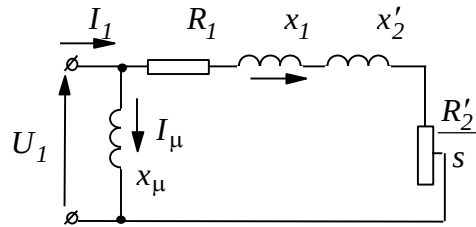


Рисунок 5.1 - Г-подібна схема заміщення АД

За кратністю пускового моменту λ_n визначимо приведений активний опір ротора при $s = 1$:

$$R'_2 = \frac{(P_n + P_{mex}) \lambda_n}{3(1 - s_n)(I'_{2k})^2} \approx \frac{(P_n + P_{mex}) \lambda_n}{3(1 - s_n) k_i^2 I_{l.n}^2}. \quad (5.6)$$

Якщо невідомий активний опір статора, то з достатньою ступінню точності можна прийняти:

$$R'_2 = \frac{U_{l.n}^2 (1 - s_n)}{2c_l (P_n + P_{mex}) \lambda_n \left(1 + \frac{c_l}{s_k} \right)}, \quad (5.7)$$

де $c_l = 1.02 \div 1.06$ - коефіцієнт насичення магнітного кола.

При номінальній напрузі статора 220-380 В отримане значення опору слід збільшити в 1.3-1.8.

Індуктивний опір статора і ротора при $s = 1$ без урахування намагнічуючого струму не завжди дає позитивний результат, тому краще скористатися виразом для критичного ковзання і з нього одержати значення x_k :

$$s_k = \frac{R'_2}{\sqrt{R_l^2 + x_k^2}}. \quad (5.8)$$

Індуктивний опір контуру намагнічування

$$x_\mu = \frac{U_{l.n}}{\sqrt{3} \cdot I_{\mu.n}}. \quad (5.9)$$

За табличними даними можна визначити номінальні втрати двигуна, знаючи ККД для номінального навантаження і опори обмоток.

Додаткові втрати в статорі:

$$\Delta P_\partial = 0.005 P_n. \quad (5.10)$$

Втрати в обмотці статора і додаткові втрати:

$$\Delta P_{l.n} = \Delta P_{l.m.n} + \Delta P_\partial = 3 I_{l.n}^2 \cdot R_l + 0.005 P_n. \quad (5.11)$$

Механічні втрати:

$$\Delta P_{mex} = 0.01 P_n. \quad (5.12)$$

Втрати в роторі:

$$\Delta P_{2.n} = \frac{(\Delta P_n + \Delta P_{mex}) s_n}{1 - s_n} = \frac{1.01 \Delta P_n s_n}{1 - s_n}. \quad (5.13)$$

Сумарні втрати двигуна:

$$\Sigma \Delta P_n = P_n \left(\frac{1 - \eta_n}{\eta_n} \right). \quad (5.14)$$

Втрати в сталі статора:

$$\Delta P_{lc.n} = \Sigma \Delta P_n - (\Delta P_{l.n} + \Delta P_{mex} + \Delta P_{2.n}) \quad (5.15)$$

5.2 Механічна характеристика асинхронного двигуна і її апроксимація видозміненою формулою Клосса

Відомо, що вирази, які застосовуються для розрахунку механічної характеристики $\omega = f(M)$, дають похибку в області високих ковзань, оскільки не враховують ряд особливостей двигуна: насичення; витіснення струму і т.п.

Існуюча методика дозволяє точно побудувати механічну характеристику АД, використовуючи формулу Клосса:

$$M = \frac{M_k \left(2 + 2 \frac{R_l}{c_l R'_2} s_k \right)}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s} + 2 \frac{R_l}{c_l R'_2} s_k}. \quad (5.16)$$

Для врахування особливостей двигуна, щоб одержати точну механічну характеристику, необхідно у вираз (5.16) підставити значення M_k і s_k , що відповідають активному й індуктивному опорам для даного ковзання, тобто $M_k = f(s)$ і $s_k = f(s)$. Для цього вводяться змінні коефіцієнти: $(a, b, c) = f(s)$.

Тепер формулу Клосса можна записати:

$$M = \frac{aM_k \left(2 + 2b \frac{cR_1}{c_1 R_2'} s_k \right)}{\frac{s}{bs_k} + \frac{bs_k}{s} + 2b \frac{cR_1}{c_1 R_2'} s_k}, \quad (5.17)$$

а замість коефіцієнтів (a, b, c) ввести один $\xi_m = f(s)$:

$$M = \frac{M_k (2 + \xi_m)}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s} + \xi_m}. \quad (5.18)$$

Цей вираз повинен забезпечувати значення моменту в 4-х гарантованих точках:

$$M = 0, \quad \text{для} \quad s = 0;$$

$$M = M_k, \quad \text{для} \quad s = s_k;$$

$$M = M_n, \quad \text{для} \quad s = s_n;$$

$$M = M_n, \quad \text{для} \quad s = 1.$$

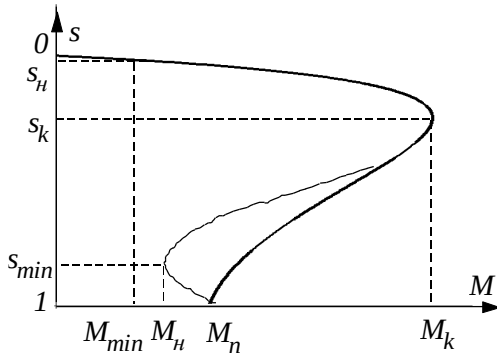


Рисунок 5.2 - Механічна характеристика АД

Для цих режимів визначаються значення коефіцієнтів ξ_m : $\xi_{m.n.}$ - для пускового і $\xi_{m.h.}$ - для номінального режимів:

$$\xi_{m.n.} = \frac{\left(\frac{s_n}{s_k} + \frac{s_k}{s_n} \right) M_n - 2M_k}{M_k - M_n}; \quad (5.19)$$

$$\xi_{m.h.} = \frac{\left(\frac{s_n}{s_k} + \frac{s_k}{s_n} \right) M_h - 2M_k}{M_k - M_h} \quad (5.20)$$

За отриманими даними виводиться апроксимуючий коефіцієнт $\xi_m = f(s)$:

$$\xi_m = \xi_{m.n.} + \frac{\xi_{m.h.} - \xi_{m.n.}}{(1 - s_n)^\gamma} (1 - s)^\gamma. \quad (5.21)$$

Показник ступеня γ - впливає на увігнутість механічної характеристики, при $\gamma = 1$ залежність $\xi_m = f(s)$ - лінійна. Для одержання більшої точності увігнутості можна прийняти:

$$\gamma < 1 \quad \text{для} \quad \xi_m < \xi_{m.n.}, \quad \text{наприклад:} \quad \gamma = 0.5;$$

$$\gamma > 1 \quad \text{для} \quad \xi_m > \xi_{m.n.}, \quad \text{наприклад:} \quad \gamma = 1.5.$$

Це дозволяє будувати механічну характеристику, якщо відома п'ята точка - точка мінімального моменту (рис.5.2., - тонка лінія).

$$\text{Звичайно} \quad M_{min} = (0.8 \div 0.9) M_n, \quad s_{min} = (0.8 \div 0.9).$$

За формулою обчислюють $\xi_{m.min}$:

$$\xi_{m.min.} = \frac{\left(\frac{s_{min}}{s_k} + \frac{s_k}{s_{min}} \right) M_{min} - 2 M_k}{M_k - M_{min}} \quad (5.22)$$

і γ :

$$\gamma = \frac{\lg[(\xi_{m.min} - \xi_{m.n}) / (\xi_{m.n} - \xi_{m.n})]}{\lg[(1 - s_{min}) / (1 - s_n)]}, \quad (5.23)$$

а потім підставляють у вираз для розрахунку ξ_m за умови:

$$\xi_{m.n} > \xi_{m.min} > \xi_{m.n} \text{ або } \xi_{m.n} < \xi_{m.min} < \xi_{m.n}.$$

В інших випадках

$$\xi_m = \xi_{m.min} - \frac{\xi_{m.min} - \xi_{m.n}}{(s_{min} - s_n)^\gamma} (s_{min} - s)^\gamma \text{ для } 0 < s < s_{min} \quad (5.24)$$

або

$$\xi_m = \xi_{m.min} - \frac{\xi_{m.min} - \xi_{m.n}}{(1 - s_n)^\gamma} (1 - s)^\gamma \text{ для } s_{min} < s < s_n, \quad (5.25)$$

приймаючи $\gamma = 1 \div 1.5$.

5.3 Лінеаризована модель асинхронного двигуна

Розглянемо модель АД, припускаючи, що робота відбувається на лінійній ділянці характеристики.

Рівняння механічної характеристики на лінійній ділянці (рис.5.2.):

$$M = \frac{M_k}{s_k} s, \quad (5.26)$$

звідки

$$M = \frac{M_k}{s_k} \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{M_k}{s_k \omega_0} (\omega_0 - \omega) = \beta (\omega_0 - \omega). \quad (5.27)$$

Для урахування часу протікання електромагнітних процесів введемо електромагнітну сталу часу:

$$T = \frac{L}{\omega_0 s_k} = \frac{x_k}{\omega_0 R'_2} = \frac{L_k}{R'_2}. \quad (5.28)$$

Структурна схема АД в межах лінійної частини характеристики буде мати вигляд (рис.5.3):

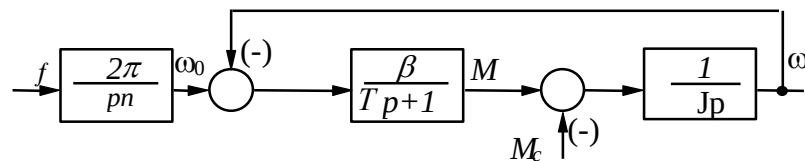


Рисунок 5.3. Структурна схема АД в межах лінійної частини характеристики

З рис.5.3. видно, що структурна схема АД в цьому випадку збігається з аналогічною схемою для ДПС (рис.4.7) незалежного збудження. Збігаються і їхні динамічні властивості.

Дана структурна схема може бути використана для аналізу процесів при частотному регулюванні, при регулюванні напруги на статорі та ін. Однак, при цьому необхідно враховувати зміну параметра β .

Варто пам'ятати, що модель є прийнятною лише при таких змінах керуючих впливів, коли ми не виходимо за межі лінійної частини характеристик (рис.5.4.). Перехід $a - b$ можливий, перехід $c - d$ ні.

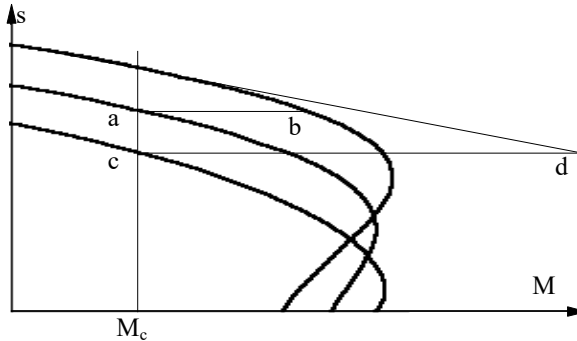


Рисунок 5.4 - До визначення діапазону придатності моделі АД

У даній моделі не можна розрахувати прямий пуск АД на повні U і f , але можна розрахувати пуск при лінійній зміні U і f . Можна розраховувати перехідні процеси зміни навантаження, заздалегідь оцінивши межі зміни моменту.

Тема 6. Математичне моделювання тиристорних перетворювачів

6.1 Методи моделювання тиристорних перетворювачів

Як впливає з розглянутих вище методів моделювання, для точного опису фізичних процесів в електромеханічних системах потрібне складання нелінійних диференціальних рівнянь. Навіть невелика відмінність у схемі може привести до того, що моделюватися буде, по суті, новий об'єкт, для якого необхідно вводити нові припущення, наближення тощо.

Розглянемо основні прийоми, що застосовуються в практиці моделювання тиристорних перетворювачів.

Метод припасовування (кусково-лінійної апроксимації). Нелінійні диференціальні рівняння замінюються сукупністю лінійних диференціальних рівнянь, кожне з яких справедливе тільки для свого інтервалу часу.

Перехідний процес визначається на окремих інтервалах, причому значення шуканих величин і їхніх похідних наприкінці попереднього інтервалу є початковими умовами для наступного.

Цей метод найчастіше застосовують для дослідження несиметричних режимів і розрахунку аварійних струмів.

Недоліками цього методу є великий обсяг обчислень і необхідність рішення трансцендентних рівнянь, що визначають моменти переходу від одного інтервалу до іншого.

Метод кінцево-різницевого рівнянь. Дійсна крива перехідного процесу замінюється наближеною, що є огинаючою дискретних значень досліджуваної величини, взятої через рівні проміжки часу.

В основі методу лежить заміна диференційного рівняння наближеним кінцево-різницевою, розв'язання якого можливе в рекурентній формі.

Цей метод зручний для аналізу усталених процесів (при сталих кутах керування, комутації тощо.).

Ітераційний метод. Відповідно до цього методу виконується послідовне інтегрування системи рівнянь, що описує об'єкт.

Недоліки методу - велика кількість ітерацій, великий обсяг обчислень, одержання рішення в незручному вигляді (вигляді нескінченного ряду).

Метод гармонічного аналізу. Шукана величина (струм або напруга) подається у вигляді ряду, що складається з першої і вищих гармонік. За принципом гармонічного балансу або колокації складають рівняння для амплітуд і фаз цих гармонік. Рішення одержують у вигляді ряду Фур'є.

Основний недолік методу - для підвищення точності необхідно збільшувати кількість гармонік, що збільшує обсяг і час обчислень.

Графоаналітичний метод. Розрахунок перехідних процесів здійснюється за миттєвими значеннями струмів і напруг із використанням кусково-лінійної апроксимації вольт-амперної характеристики вентилів.

Метод неточний, громіздкий, незручний у складних схемах.

6.2 Моделювання тиристорних перетворювачів за середніми значеннями випрямленої ЕРС

Для моделювання тиристорного перетворювача за середнім значенням випрямленої ЕРС представимо його у вигляді трьох функціональних елементів (Рисунок 6.1): системою імпульсно-фазового керування (СІФК), силовою ланкою (СЛ) та ланкою навантаження (ЛН). Система імпульсно-фазового керування перетворює аналоговий сигнал керування U_k в послідовність імпульсів керування, які мають відповідний фазовий зсув відносно точки природного відкриття тиристора, що визначається кутом керування α .

Вхідною величиною для ТП є напруга керування U_k , регульованою координатою - середнє значення випрямленої ЕРС. E_d на інтервалі провідності. На величину E_d впливає струм навантаження I_d .

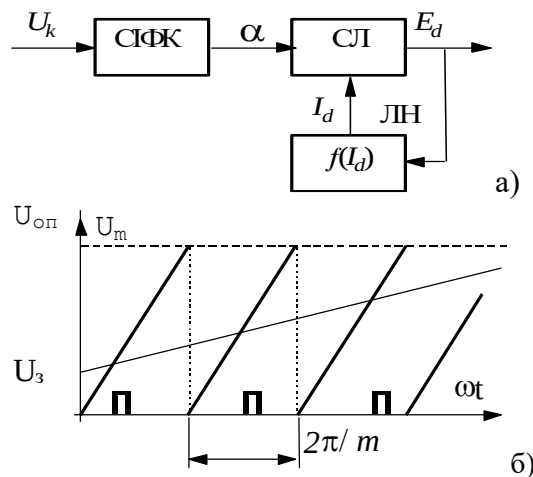


Рисунок 6.1 - Функціональна схема, а) та сигнали керування, б) тиристорним перетворювачем

В даний час найбільш часто використовують СІФК з вертикальним принципом керування. Нагадаємо суть цього принципу: пилоподібна опорна напруга порівнюється з напругою керування і у момент, коли досягається їх рівність, формується керуючий імпульс на тиристор.

Рівняння пилоподібної напруги на ділянці провідності має вигляд:

$$U_{on} = \frac{U_m}{\pi}(\omega t) = \frac{U_m}{\lambda} \omega t, \quad (6.1)$$

де $\lambda = \frac{2\pi}{m}$ - кут провідності.

Рівність пилоподібної і керуючої напруг настає в момент часу, коли

$$U_k = \frac{U_m}{\pi}(\omega t). \quad (6.2)$$

Таким чином

$$\omega t = \pi \frac{U_k}{U_m} = \alpha = \lambda \frac{U_k}{U_m}. \quad (6.3)$$

Знайдена величина є кут керування α , що відрахований від точки природної комутації тиристора.

З отриманого виразу випливає, що СІФК можна представити безінерційною (пропорційною) ланкою.

Реально, через інерційність фільтрів та інших елементів, що входять до схеми СІФК, залежність α від U_k описується диференціальним рівнянням виду:

$$T_\mu \frac{d\alpha}{dt} = \frac{U_k}{U_m} \pi - \alpha, \quad (6.4)$$

що відповідає передатній функції аперіодичної ланки.

Іноді СІФК, як динамічний об'єкт, приводять до виду ланки з чистим запізнюванням або комбінації аперіодичної і ланки запізнювання.

Нехтуючи нелінійністю регульовальної характеристики ТП одержимо наступні варіанти передатних функцій:

$$W_{mn}(p) = \frac{E_d(p)}{U_k(p)} = \frac{k_{mn}}{T_\mu p + I}; \quad (6.5)$$

$$W_{mn}(p) = k_{mn} e^{-\tau_n p}; \quad (6.6)$$

$$W_{mn}(p) = k_{mn} \frac{e^{-\tau_n p}}{T_\mu p + I}. \quad (6.7)$$

Запізнювання в $W_{mn}(p)$ враховує той факт, що кут керування α змінюється не миттєво при зміні U_k , а тільки при наступному переключенні вентилів.

Звичайно приймають:

$$T_\mu = 0.01 \div 0.015 \text{ с};$$

$$\tau = 0.007 \div 0.015 \text{ с}.$$

Оскільки інерційність ТП мала, то її враховують тільки для малоінерційного навантаження, наприклад, для якірного ланцюга ДПС при співвідношенні $T_\mu < (4 \div 6) T_e$.

При моделюванні роботи ТП на навантаження з великою індуктивністю, наприклад, обмотку збудження, інерційністю ТП можна знехтувати і тоді

$$W_{mn}(p) = k_{mn}. \quad (6.8)$$

Недоліком моделей ТП відносно середніх значень є те, що відсутня можливість урахування зони переривчастих струмів, пульсацій випрямленої ЕРС і струму.

6.3 Моделювання з врахуванням однонаправленості вентильного кола

Необхідність такого моделювання виникає якщо ТП або випрямляч нереверсивний.

Структурно це може бути представлено у вигляді підсилювача з несиметричною характеристикою (Рисунок 6.2). Крім того, при моделюванні необхідно не тільки відсікати зворотний струм, але й обнуляти його похідну.

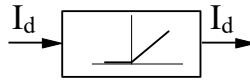


Рисунок 6.2. Підсилювач з несиметричною характеристикою

Систему рівнянь, що дозволяє враховувати однонаправленість можна записати наступним чином:

$$\begin{cases} \frac{dI_d}{dt} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } I_d \leq 0; \\ \frac{U_d - k\phi \cdot \omega - I \cdot R}{L}, & \text{якщо } I_d > 0; \end{cases} \\ I_d = 0 & \text{якщо } I_d \leq 0. \end{cases} \quad (6.9)$$

6.4 Моделювання тиристорних перетворювачів за миттєвими значеннями випрямленої ЕРС

Керований ТП відносно миттєвих значень являє собою нелінійну імпульсну систему. Неможливість запирання тиристора за допомогою керуючого сигналу обумовлює зміну тривалості інтервалу провідності в перехідних режимах.

Розглянемо часову діаграму роботи ТП і СІФК (рисунок 6.3).

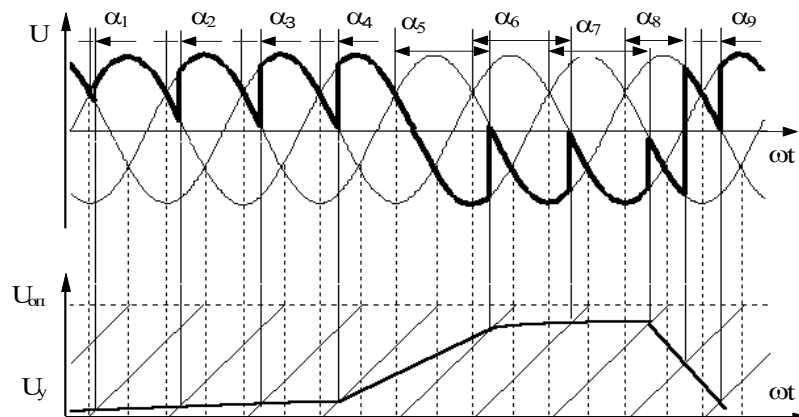


Рисунок 6.3 - Часова діаграма роботи ТП і СІФК

Оскільки за час роботи тиристора величина U_k може змінюватися, то змінюється і значення кута відкриття наступного тиристора. Тому тривалість імпульсу ЕРС, або інтервалу включення тиристора, буде величиною змінною. При сталому значенні U_k ($U_k = const$) для трифазної мостової схеми інтервал провідності дорівнює

$$\lambda = \frac{2\pi}{m} = \frac{\pi}{3}. \quad (6.10)$$

При зміні кута керування змінюється інтервал провідності, що дорівнює

$$\lambda = \frac{\pi}{3} + \alpha_2 - \alpha_1, \quad (6.11)$$

де α_1 і α_2 - кути керування на поточному і наступному інтервалі провідності.

Переведення ТП із режиму випрямлення в інверторний здійснюється з темпом, що не перевищує значення, обумовленого частотою мережі, а з інверторного у випрямний - як завгодно швидко.

Слід зазначити такий важливий факт. Фізичні процеси формування імпульсів випрямленої ЕРС і протікання струмів не залежать від номера інтервалу провідності, тому немає необхідності розглядати всю систему трифазних напруг, а досить розглянути процеси на одному інтервалі. Правда, при цьому втрачається інформація про фазні струми мережі, але її нескладно відновити.

Розглянемо алгоритм моделювання ТП за миттєвими значеннями випрямленої ЕРС.

У приведеному алгоритмі (Рисунок 6.4.) прийняті наступні позначення:

t - поточний час моделі у відносних одиницях (тобто $\omega_s t$);

t_1 - час, що минув від початку інтервалу провідності;

α_2 - кут керування на наступному інтервалі провідності;

$\Delta\alpha$ - поточна зміна інтервалу провідності;

k - ознака кінця інтервалу провідності ($t_1 = 0$ - початок, $t_1 = 1$ - кінець).

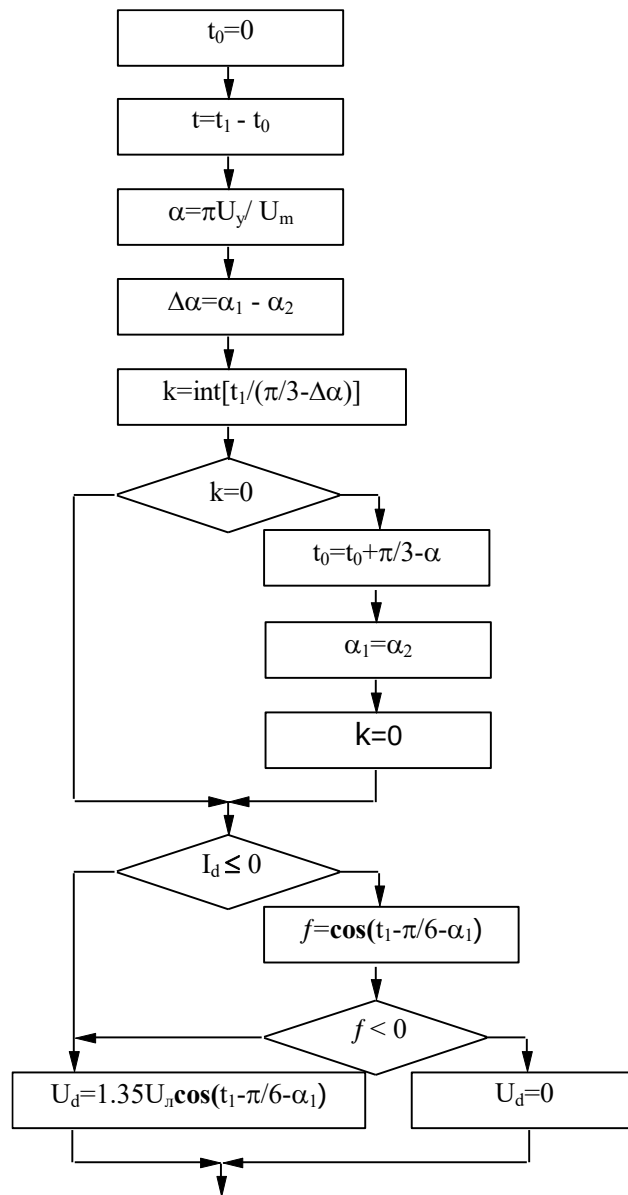


Рисунок 6.4 - Алгоритм моделювання ТП за миттєвими значеннями випрямленої ЕРС

6.5. Моделювання тиристорних перетворювачів методом переключаючих функцій

Перемикаюча функція F це спеціальна двійкова функція часу, що набуває двох значень - “0” і “1”, причому

$$F = \begin{cases} 1, & t \in \{[t_1, t_2], [t_3, t_4], \dots, [t_{n-1}, t_n]\}; \\ 0, & t \in \{[t_2, t_3], [t_4, t_5], \dots, [t_{n-2}, t_{n-1}]\}. \end{cases}$$

Розглянемо поняття і роботу перемикаючих функцій на прикладі однофазного тиристорного компенсатора реактивної потужності, принципова схема якого наведена на Рисунок 6.5.

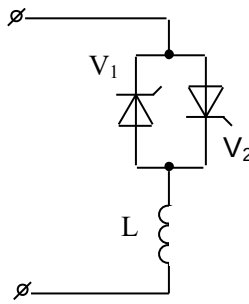


Рисунок 6.5 - Принципова схема однофазного тиристорного компенсатора реактивної потужності

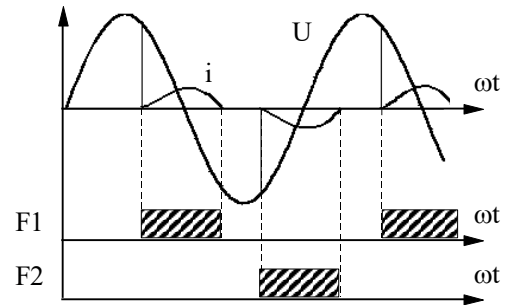


Рисунок 6.6 - Часові діаграми роботи тиристорного компенсатора реактивної потужності

Імпульси струму пропускаються по черзі вентилями V_1 і V_2 і являють собою “верхівки” синусоїди (рис. 6.6).

За законом електромагнітної індукції

$$i = \int_0^t \frac{\bar{U}}{L} dt, \quad (6.12)$$

де $\bar{U} = U_m \sin(\omega t) \cdot (F1 + F2)$ - вираз напруги через перемикаючі функції $F1$ і $F2$. Відлік часу ведеться від початку кожного імпульсу струму.

У виді, зручному для моделювання

$$\frac{di}{dt} = (F1 + F2) \frac{U_m \sin(\omega t)}{L}. \quad (6.13)$$

Використання перемикаючих функцій у даному випадку зручно ще і з тієї причини, що при $F1 = F2 = 0$ струм $i = 0$, та $\frac{di}{dt} = 0$.

Нехай потрібно виконати моделювання тиристорного перетворювача, зібраного за трифазною мостовою схемою, що працює з активно-індуктивним навантаженням.

Для спрощення будемо вважати втрати і струм холостого ходу трансформатора дуже малим, а вентиля - ідеальними ключами. Еквівалентна схема перетворювача наведена на рис. 6.7.

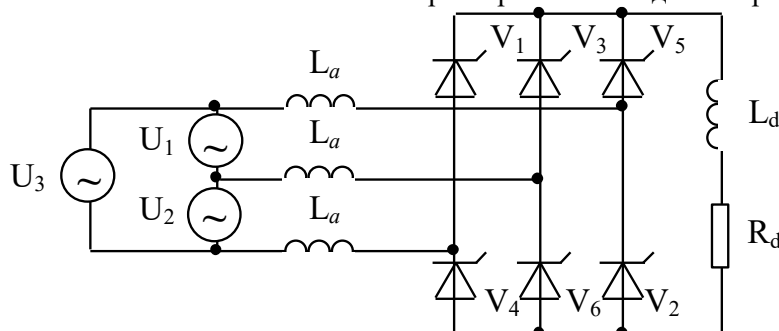


Рисунок 6.7 - Принципова схема тиристорного перетворювача з активно-індуктивним навантаженням

Індуктивність L_a є приведеною до вторинної сторони індуктивністю короткого замикання трансформатора. Якщо випрямляч живиться від мережі співрозмірної потужності, то її реактивний опір теж враховується в L_a . При необхідності до L_a відносять також індуктивності з'єднувальних проводів.

Що стосується приведених до вторинної сторони трансформатора лінійних напруг U_1, U_2, U_3 , то вони складають жорстку синусоїдальну систему.

Протікання випрямленого струму I_d через тиристори враховується за допомогою перемикаючих функцій. Передні фронти функцій $F7$ збігаються з початками комутації, задні - із закінченнями. Передні фронти функцій $F1, F2, \dots, F6$ збігаються з початками проміжків роботи пар вентилів $V1-V6$, $V1-V2, \dots, V5-V6$, відповідно, а задній фронт кожної з цих функцій збігається з переднім фронтом наступної. Номера і діаграма роботи одночасно працюючих тиристоров вказані на рис. 6.8.

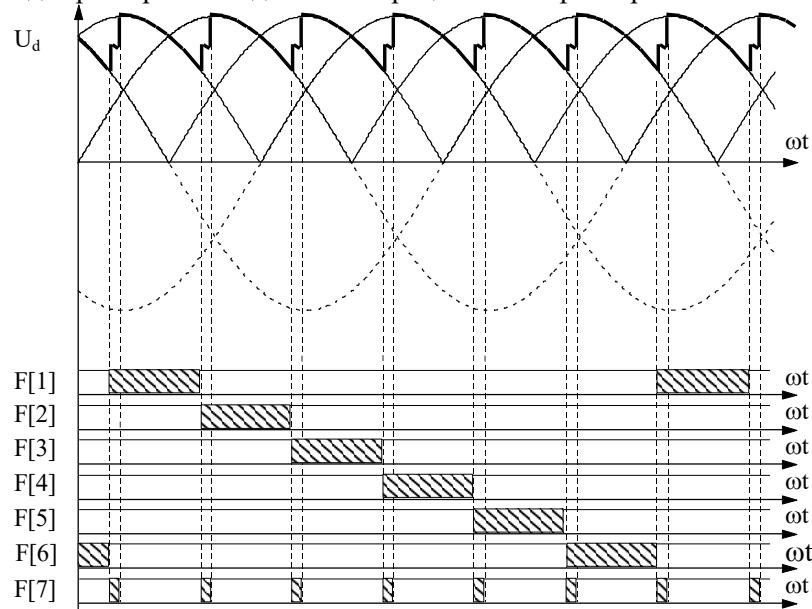


Рисунок 6.8 - Часові діаграми роботи перетворювача

Такий вибір перемикаючих функцій відображає роботу випрямляча при кутах комутації $0 < \gamma < \pi/3$.

Запишемо рівняння електричної рівноваги для наведеної еквівалентної схеми.

Використовуючи перемикаючі функції позначимо

$$U_{\Sigma} = U_1(F1 - F4) + U_2(F3 - F6) + U_3(F5 - F2) \quad (6.14)$$

Обходячи контуром двохфазного короткого замикання (Рисунок 6.9.),

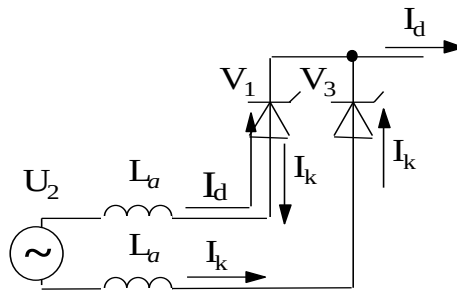


Рисунок 6.9 - Контур двохфазного короткого замикання

наприклад, через вентиля $V1$ і $V3$, одержуємо рівняння за другим законом Кірхгофа для контуру комутації:

$$L_a \frac{d(I_d - I_k)}{dt} + L_a \frac{dI_k}{dt} = U_2, \quad (6.15)$$

або

$$2L_a \frac{dI_k}{dt} = U_2 + L_a \frac{dI_d}{dt} . \quad (6.16)$$

Використовуючи метод перемикаючих функцій отримаємо:

$$2L_a \frac{dI_k}{dt} = F7 \cdot U_\Sigma + L_a \frac{dI_d}{dt} \quad (6.17)$$

Для контуру джерело-навантаження рівняння Кірхгофа запишеться у виді

$$(L_d + 2L_a) \frac{dI_d}{dt} + R_d I_d - F7 \cdot L_a \frac{dI_k}{dt} = U_\Sigma \quad (6.18)$$

Оскільки ми нехтуємо падінням напруги на вентилях, то вихідна напруга U_d на будь-якому між-комутаційному інтервалі виявляється рівною одному з лінійних, за виключенням падіння напруги на двох індуктивностях L_a , викликаного змінною складовою струму I_d .

Тому

$$U_d = U_\Sigma - 2L_a \frac{dI_d}{dt} - F7 \cdot L_a \frac{dI_k}{dt} . \quad (6.19)$$

Рівняння для струмів приведемо до виду, зручного для моделювання:

$$\frac{dI_d}{dt} = -\frac{R_d}{L_d + 2L_a} I_d + F7 \frac{L_a}{L_d + 2L_a} \frac{dI_k}{dt} + \frac{U_\Sigma}{L_d + 2L_a} , \quad (6.20)$$

$$\frac{dI_k}{dt} = F7 \cdot \left[\frac{U_\Sigma}{2L_a} + \frac{1}{2} \frac{dI_d}{dt} \right] . \quad (6.21)$$

На рис. 6.10. наведений якісний вид перехідних процесів, що отримані при моделюванні.

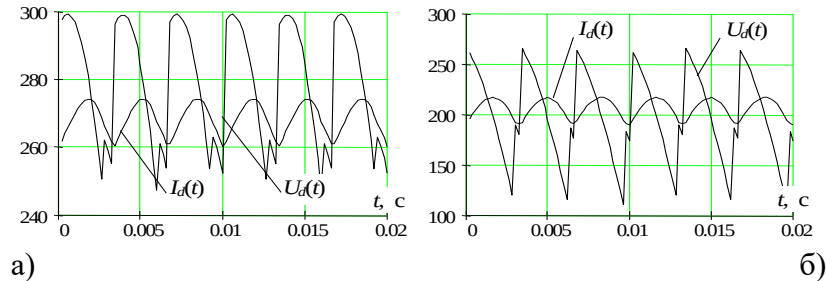


Рисунок 6.10 - Графіки струму та напруги випрямляча при кутах керування: а) - 20° , б) - 50° .

Тема 7. Рівняння динамічних об'єктів у формі простору станів

7.1. Уявлення про простір станів

Сучасна теорія автоматичного управління оперує з векторно-матричними моделями динамічних систем. При цьому розглядаються в загальному випадку багатовимірні системи, тобто системи довільного порядку з багатьма входами і багатьма виходами, в зв'язку, з чим широко використовуються векторно-матричні рівняння і апарат векторної алгебри. Для отримання векторно-матричної моделі (ВММ) досліджувана динамічна система представляється у вигляді "чорного ящика" з деяким числом вхідних і вихідних каналів (рис. 7.1, а).

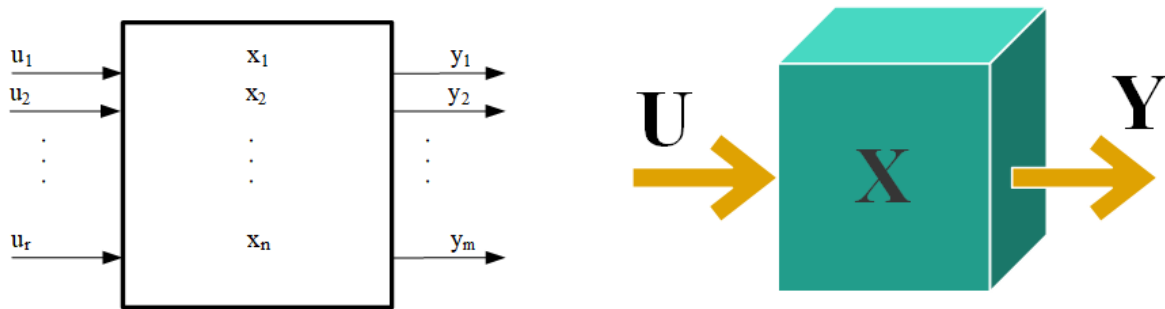


Рисунок 7.1 - Скалярний (а) і векторне (б) уявлення динамічної системи у вигляді «чорного ящика»

Всі змінні, що характеризують систему, можна розділити на три групи.

1. *Вхідні змінні*, або вхідні впливу, які генеруються системами, які не належать до досліджуваної системи. Вони характеризуються вектором входу:

$$\mathbf{u}^T = [u_1, u_2, \dots, u_n], r - \text{число входів.}$$

2. *Вихідні змінні*, характеризують реакцію системи на зазначені вхідні впливу. Представляються вектором виходу:

$$\mathbf{y}^T = [y_1, y_2, \dots, y_n], m - \text{число виходів.}$$

3. *Проміжні змінні*, що характеризують внутрішній стан системи - *змінні стану*, представляються вектором

$$\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n], n - \text{число змінних стану.}$$

Таким чином, сукупність входів можна розглядати як один узагальнений вхід, на який впливає вектор входу $\mathbf{u}$, сукупність виходів як вектор $\mathbf{y}$, а сукупність проміжних координат, що характеризують стан системи, - у вигляді вектора стану $\mathbf{x}$ (див. рис. 7.1, б).

Стан системи це та мінімальна інформація про минуле, яка необхідна для повного опису майбутнього поведінки (тобто виходів) системи, якщо поведінка її входів відома.

Сама система, її входи і виходи - це три взаємопов'язаних об'єкта, які в кожній конкретній ситуації визначаються відповідно математичною моделлю системи, завданням множин вхідних і вихідних змінних.

Рішення задач аналізу і синтезу пов'язано з дослідженням станів системи, безліч яких утворює простір станів, $\mathbf{x} \in R^n$.

Векторно-матричні моделі в безперервному часу

У загальному випадку динамічна система в безперервному часу може бути описана парою матричних рівнянь:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t], \quad (7.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Q}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t], \quad (7.2)$$

де $\mathbf{F}$ - n -вимірний вектор-функція системи; $\mathbf{Q}$ - m -вимірний вектор-функція виходу.

Матричне рівняння (7.1) називають *рівнянням стану* системи. Його рішення, що задовольнить початковому умові $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$, дає вектор стану системи:

$$\mathbf{x}(t) = \Psi[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t), t] \quad (7.3)$$

Матричне рівняння (7.2), що визначає вихідні змінні в залежності від $\mathbf{x}(t)$ і $\mathbf{u}(t)$, називають *рівнянням виходу*.

В частковому випадку залежності $F_i (i = 1, \dots, n)$, $Q_k (k = 1, \dots, m)$ можуть бути лінійними комбінаціями змінних стану x_i і вхідних змінних u_q . При цьому динамічна система описується у векторно-матричній формі:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (1.4)$$

$$y = C(t)x + D(t)u, \quad (1.5)$$

Перехід до стаціонарних моделей дозволяє оперувати з коефіцієнтними матрицями, тобто зі стаціонарними рівняннями

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1.6)$$

$$y = Cx + Du, \quad (1.7)$$

де:

A - функціональна матриця розміром $n * n$, звана *матрицею стану системи*;

B - функціональна матриця розміром $n * r$, звана *матрицею керування (входу)*;

C - функціональна матриця розміром $m * n$, звана *матрицею вихода по стану*;

D - функціональна матриця розміром $m * r$, звана *матрицею вихода по керуванню*.

Достатньо часто **D**=0, тобто вихід безпосередньо не залежить від входу.

Співвідношення розмірностей окремих матриць наглядно демонструється на рис. 7.2.

	n	r
n	A[n x n]	B[n x r]
m	C[m x n]	D[m x r]

Рисунок 7.2 - Співвідношення розмірностей окремих матриць рівнянь динамічного об'єкту у просторі станів

Надалі під векторно-матричною моделлю (ВММ) об'єкта будемо розуміти опис її динамічного поведінки в класі стаціонарних безперервних лінійних систем, представлене у вигляді рівнянь (7.6), (7.7).

Таким чином, ВММ має єдину форму подання, що значно полегшує алгоритмізацію і комп'ютерну реалізацію проектних процедур і проектних операцій структурно-параметричного синтезу і аналізу систем управління. Однак з використанням ВММ може бути отримано лише наближене проектне рішення, яке потребує подальшого уточнення, так як такі моделі відображають динамічну поведінку реального об'єкта лише в класі стаціонарних лінійних систем.

Побудова ВММ реального об'єкта пов'язане з проблемами лінеаризації вихідного математичного опису та приведення його до структурованого увазі - формі Коші.

Якщо ми знаємо фізичний опис системи і можемо записати рівняння, що описують поведінку її окремих частин, як це має місце в разі двигуна постійного струму, то отримати рівняння стану системи зазвичай порівняно не важко.

Приклад 1.1. Отримаємо рівняння стану для найпростішої RLC-кола, показаної на рис.7.3.

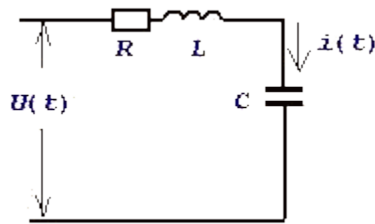


Рисунок 7.3 – Схема RLC-кола

Динамічна поведінка цієї системи при $t \geq t_0$ повністю визначається, якщо відомі початкові значення $i(t_0)$, $U_c(t_0)$ і вхідна напруга $U(t)$ при $t \geq t_0$. Отже, змінні $i(t)$, $U_c(t)$ можна вибрати в якості змінних стану, тобто $\mathbf{x}^T = [i(t), U_c(t)]$, в якості вектора вихідних змінних приймемо одновимірний вектор струму в RLC- контурі, $\mathbf{y}^T = [i(t)]$.

Для зазначених змінних стану можна записати диференціальні рівняння

$$U(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + U_c$$

$$\frac{dU_c}{dt} = i(t)$$

Подано ці рівняння в такому вигляді:

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L} U(t) - \frac{R}{L} \cdot i(t) - \frac{1}{L} U_c$$

$$\frac{dU_c}{dt} = i(t)$$

або в векторно-матричній формі

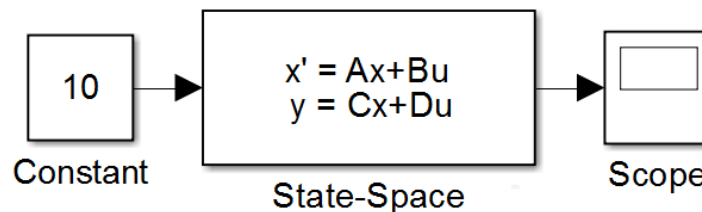
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i(t) \\ U_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ U_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot U(t) \quad (1.8)$$

$$[i(t)] = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ U_c(t) \end{bmatrix}$$

Таким чином, для даної системи матриці $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ векторно-матричної моделі будуть мати наступний вигляд:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

Застосуємо MATLAB / Simulink для моделювання розглянутої системи, поданої у вигляді БММ.

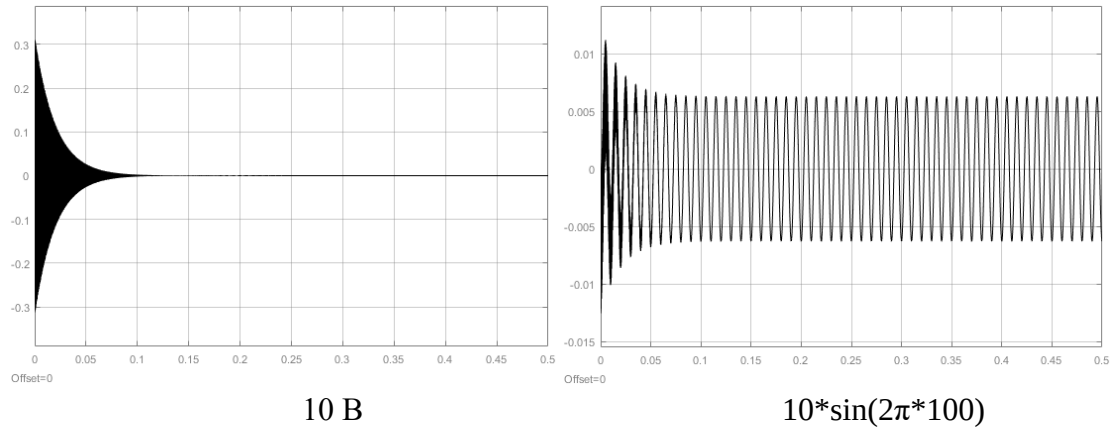


InitFcn – скрипт.

```

%% Params
R = 0.1;
L = 0.001;
C = 1e-6;
U = 100;
%% State space matrices
A1 = [-R/L -1/L; 1/C 0];
B1 = [-1/L; 0];
C1 = [1 0];
D1 = [0];

```



Приклад 2. На рис. 7.4. показана схема включення електродвигуна постійного струму незалежного збудження, що працює при сталому магнітному потоці ($\Phi = \text{const}$).

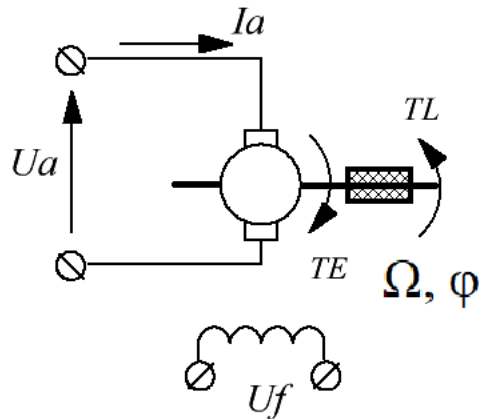


Рисунок 7.4 – Схема включення і змінні стану двигуна постійного струму

Дифференциальные уравнения для такого объекта могут быть записаны относительно следующих переменных состояния: $\Omega(t)$ - скорости вращения ротора, тока якоря $i(t)$, углового перемещения ротора $\varphi(t)$. При использовании известных зависимостей для электродвижущей $E = C \cdot \Omega$ и вращающего момента двигателя $M = C \cdot i$ получим уравнение электрической цепи:

$$U_a(t) = R_a \cdot i(t) + L_a \cdot \frac{di(t)}{dt} + C \cdot \Omega$$

уравнения движения вращающейся части

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C \cdot i - T_L; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \Omega$$

где J – приведенный момент инерции электродвигателя.

Примем векторы состояния, входа и выхода как $\mathbf{x}^T = [\Omega(t), i(t), \varphi(t)]$; $\mathbf{u}^T = [U_a, T_L]$; $\mathbf{y}^T = [\Omega(t), i(t), \varphi(t)]$. Получим следующую векторно-матричную модель электродвигателя постоянного тока.

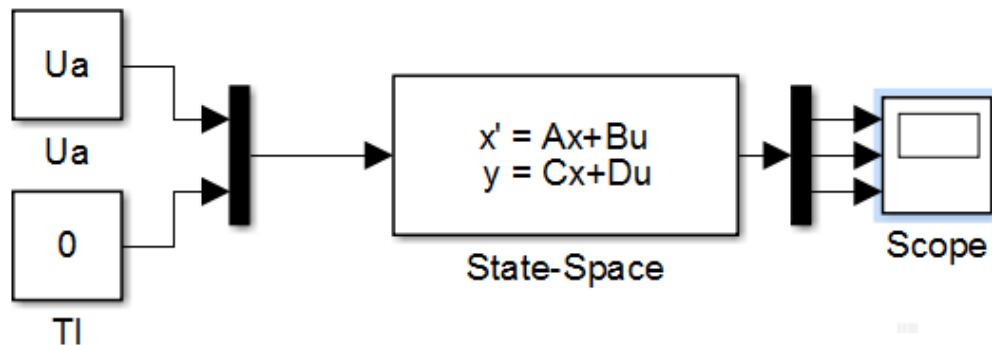
$$\begin{bmatrix} \dot{\Omega} \\ \dot{i} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{C}{J} & 0 \\ -\frac{C}{L} & -\frac{R}{L} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Omega \\ i \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{J} \\ \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_a \\ T_L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Omega \\ i \\ \varphi \end{bmatrix}$$

то есть для рассматриваемой системы матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ векторно-матричной модели будут иметь следующий вид:

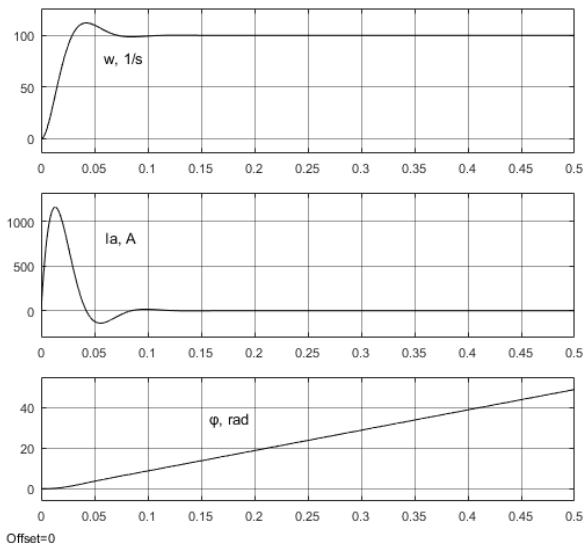
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{kF}{J} & 0 \\ -\frac{kF}{L} & -\frac{R}{L} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{J} \\ \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Применим MATLAB/Simulink для моделирования рассмотренной системы, представленной в виде ВММ.

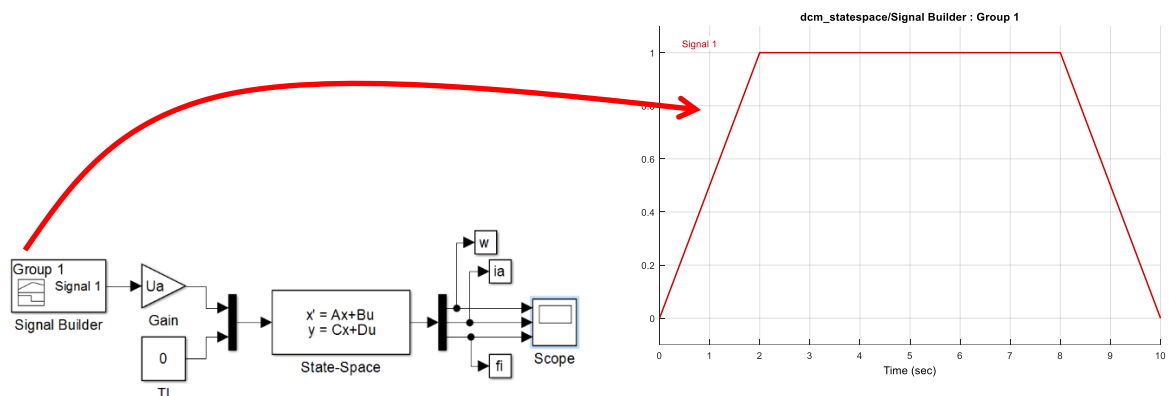


InitFcn – скрипт.

```
%% Params
Ua = 200;
R = 0.1;
L = 0.001;
kF = 2;
J = 0.5;
%% State space matrices
A = [0 kF/J 0; -kF/L -R/L 0; 1 0 0];
B = [0 -1/J; 1/L 0; 0 0];
C = [1 0 0; 0 1 0; 0 0 1];
D = [0 0; 0 0; 0 0];
```



Сформируем трехступенчатую диаграмму движения двигателя постоянного тока. Модернизируем приведенную выше модель следующим образом:



Полученные графики изменения во времени переменных двигателя показаны на рис. 7.

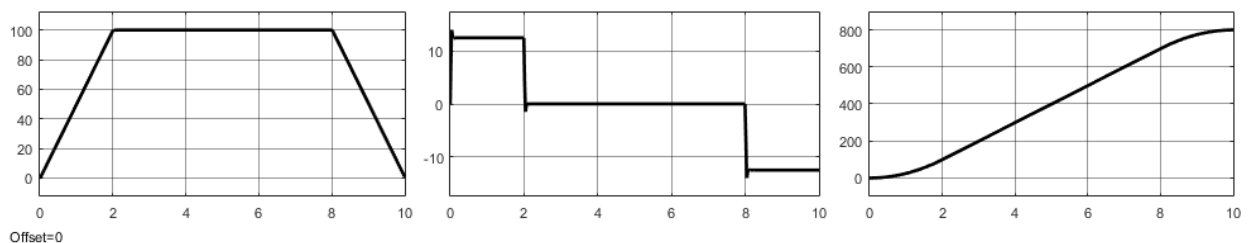
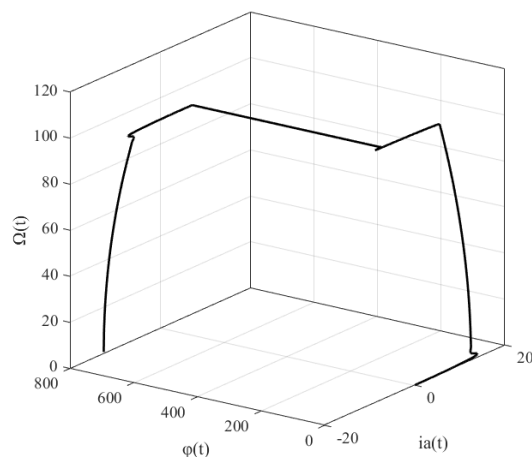
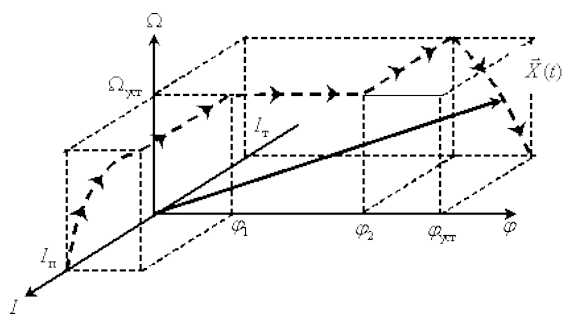


Рис. 7

Сформируем трехмерное пространство состояний электропривода с траекторией движения конца вектора состояния в процессе позиционирования по временным графикам изменения компоненты вектора состояния.



Приклад 3. Построим векторно-матричную модель электромеханического объекта - электропривода постоянного тока, приводящего в движение через механический редуктор тяжелую платформу. В данной модели необходимо учесть действие упругой связи между двигателем и рабочей машиной. Функциональная схема такого объекта приведена на рис. 1.4.

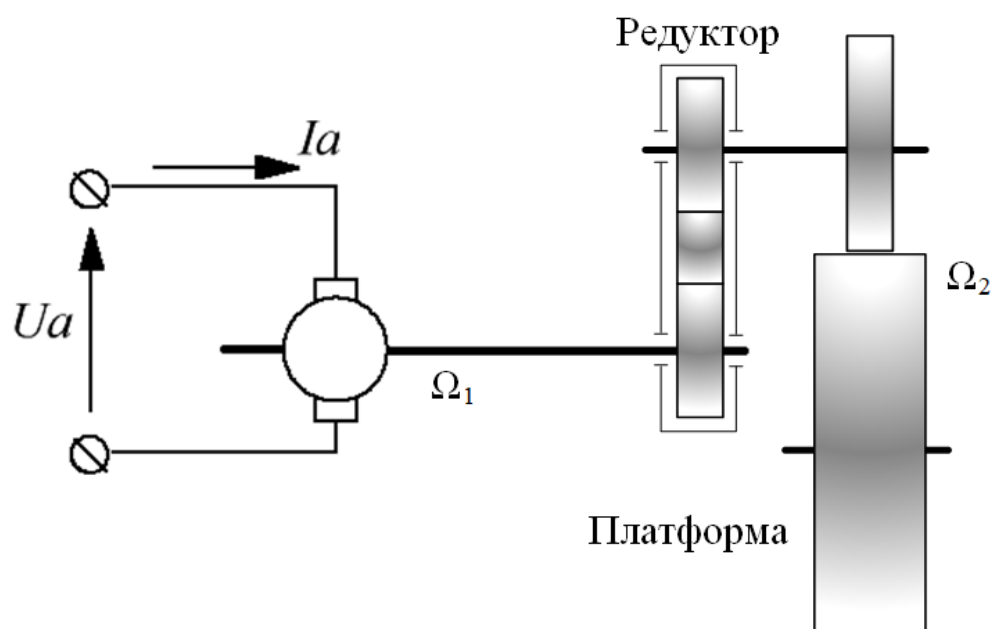


Рисунок 1.4 – Функціональна схема електромеханічного об'єкта з пружними зв'язками

Здесь легко выделить три функциональных элемента, соответствующие трем видам преобразования энергии:

преобразователь, осуществляющий управляемое преобразование электрической энергии;

двигатель, выполняющий преобразование электрической энергии в механическую, - электромеханический преобразователь;

механизм, осуществляющий передачу механической энергии от вала двигателя через редуктор к рабочему органу - платформе.

При использовании общеизвестных допущений и обозначений координат и параметров такого объекта его динамическое поведение при $T_L = 0$ описывается следующей системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dU_a}{dt} &= \frac{1}{T_c} \cdot U_a + \frac{K_c}{T_c} \cdot U_u \\ \frac{di_a}{dt} &= -\frac{1}{T_a} \cdot i_a - \frac{kF}{R_a \cdot T_a} \cdot \Omega_1 + \frac{1}{R_a \cdot T_a} \cdot U_a \\ \frac{d\Omega_1}{dt} &= \frac{kF}{J_1} \cdot i_a - \frac{1}{J_1} \cdot T_s \\ \frac{dT_s}{dt} &= C_{12} \cdot (\Omega_1 - \Omega_2) \\ \frac{d\Omega_2}{dt} &= \frac{1}{J_2} \cdot T_s\end{aligned}$$

Если компонентами вектора состояния выбрать $\mathbf{x}^T = [U_a, i_a(t), \Omega_1(t), T_s(t), \Omega_2(t)]$; $\mathbf{u}^T = [U_u]$; $\mathbf{y}^T = [\Omega_2(t)]$, где U_n – напряжение преобразователя, i_a – ток электродвигателя, Ω_1 – скорость вращения электродвигателя, M_y – момент упругости механизма, Ω_2 – скорость вращения механизма, то элементы векторно-матричной модели принимают следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_a \cdot T_a} & -\frac{1}{T_a} & -\frac{kF}{R_a \cdot T_a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{kF}{J_1} & 0 & -\frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & C_{12} & 0 & -C_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_2} & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{K_c}{T_c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

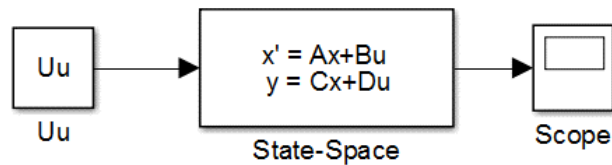
$$\mathbf{C} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

Параметры электромеханической системы приведены в табл.1.

Таблица 1.1. Параметры электромеханической системы

Параметр	Значение	Ед. изм.
T_c	0.01	с
K_c	22	
T_a	0.0143	с
R_a	2.1	Ом
J_1	0.045	кгм ²
J_2	0.104	кгм ²
kF	0.83	Вб
C_{12}	80	Нм/с ⁻¹

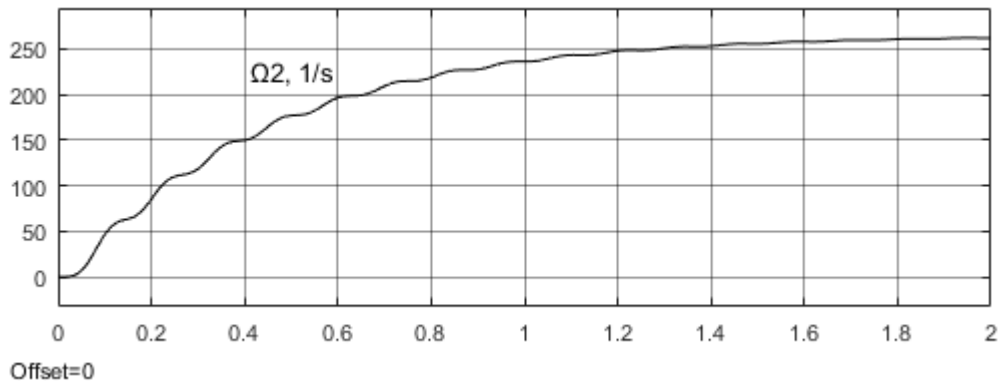
Применим MATLAB/Simulink для моделирования рассмотренной системы, представленной в виде ВММ.



InitFcn – скрипт.

```

%% Params
Uu = 10;
Tc = 0.01;
Kc = 22;
Ta = 0.0143;
Ra = 2.1;
R = 0.1;
kF = 0.83;
J1 = 0.045;
J2 = 0.104;
C12 = 80;
%% State space matrices
A = [-1/Tc 0 0 0 0;
      1/(Ra*Ta) -1/Ta -kF/(Ra*Ta) 0 0;
      0 kF/J1 0 -1/J1 0;
      0 0 C12 0 -C12;
      0 0 0 1/J2 0];
B = [Kc/Tc; 0; 0; 0; 0];
C = [0 0 0 0 1];
D = [0];
  
```



Пример 1.3.1. Построить графики скорости двигателя и платформы для предыдущей задачи.

InitFcn – скрипт.

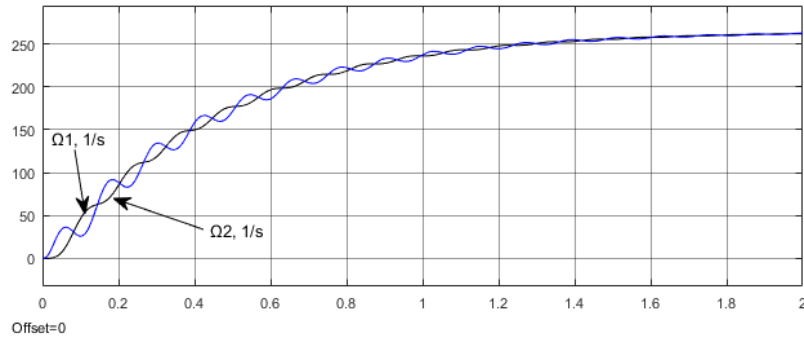
```

%% Params
Uu = 10;
Tc = 0.01;
Kc = 22;
Ta = 0.0143;
Ra = 2.1;
R = 0.1;
kF = 0.83;
J1 = 0.045;
  
```

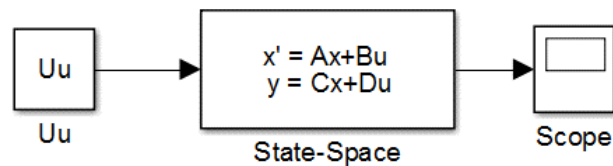
```

J2 = 0.104;
C12 = 80;
%% State space matrices
A = [-1/Tc 0 0 0 0;
1/(Ra*Ta) -1/Ta -kF/( Ra*Ta) 0 0;
0 kF/J1 0 -1/J1 0;
0 0 C12 0 -C12;
0 0 0 1/J2 0];
B = [Kc/Tc; 0; 0; 0; 0];
C = [0 0 0 0 1; 0 0 1 0 0];
D = [0; 0];

```



Применим MATLAB/Simulink для моделирования рассмотренной в примере 2 раздела 4.2.4 двухмассовой динамической системы, представленной в виде ВММ. Реализация модели двигателя постоянного тока в форме пространства состояний изображена на рис. 4.102. Наведенная модель размещена в файле **CD:DC MOTOR/dcmotor_2mass_statespace.slx**.



```

InitFcn – скрипт.
%% Params
Uu = 10;
Tc = 0.01;
Kc = 22;
Ta = 0.0143;
Ra = 2.1;
R = 0.1;
kF = 0.83;
J1 = 0.045;
J2 = 0.104;
C12 = 80;
%% State space matrices
A = [-1/Tc 0 0 0 0;
1/(Ra*Ta) -1/Ta -kF/( Ra*Ta) 0 0;
0 kF/J1 0 -1/J1 0;
0 0 C12 0 -C12;
0 0 0 1/J2 0];
B = [Kc/Tc; 0; 0; 0; 0];
C = [0 0 0 0 1];

```

$$D = [0];$$

Графики скорости двигателя и платформы для предыдущей задачи приведены на рис. 4.108

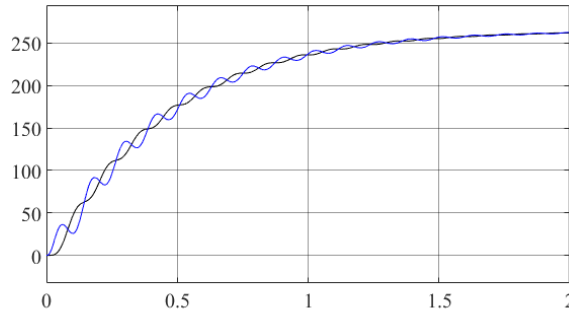


Рисунок 4.108 - Графики скорости двигателя и платформы с учетом упругих свойств механической передачи.

7.2 Взаимосвязь видов математических моделей двигателя постоянного тока

Так как исходной базой для математических моделей являются дифференциальные уравнения, то логичным будет определить связь уравнений состояния с передаточными функциями САУ. Для этого применим преобразование Лапласа к уравнениям состояния и выхода

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\tag{3.1}$$

при нулевых начальных условиях, заменим оригиналы переменных изображениями по Лапласу и получим систему векторно-матричных операторных уравнений

$$\begin{aligned}s \cdot x(s) &= Ax(s) + Bu(s), \\ y(s) &= Cx(s),\end{aligned}\tag{3.2}$$

Определим связь между вектором входа и векторами состояния и выхода. Из первого уравнения системы (3.2) имеем

$$\begin{aligned}s \cdot x(s) - Ax(s) &= B \cdot u(s), \\ (s \cdot I - A)x(s) &= B \cdot u(s)\end{aligned}\tag{3.3}$$

и если матрица $(sI - A)$ не вырожденная, то есть $\det(sI - A) \neq 0$, получим

$$x(s) = (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot u(s)\tag{3.4}$$

Откуда следует, что

$$H_1(s) = (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B\tag{3.5}$$

Подставив (3.4) в (3.3), получаем

$$y(s) = Cx(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot u(s)$$

В результате получаем

$$H_2(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B\tag{3.6}$$

Вспомним, что компонентами эквивалентных матриц являются передаточные функции системы. Следовательно, выражения (3.5) и (3.6) представляют собой универсальные формулы для вычисления всех необходимых для анализа передаточных

функций многомерной системы, по которым могут быть получены структурные схемы и частотные характеристики.

Заметим, что каждый элемент эквивалентных матриц (передаточных функций) имеет, по определению обратной матрицы, сомножитель, равный $1/\det(sI - A)$.

То есть полином $\det(sI - A)$ является общим знаменателем для всех передаточных функций, а уравнение

$$\det(sI - A) = 0 \quad (3.7)$$

является характеристическим уравнением системы.

Таким образом, мы не только получили связь между математическими моделями во временной и частотной областях, но и универсальные выражения для определения передаточных функций и характеристических уравнений любых линейных объектов или систем управления. Исходными параметрами для выражений (3.5), (3.6) и (3.7) являются матрицы параметров уравнений состояния и выхода.

Пример

Электродвигатель постоянного тока независимого возбуждения (с постоянными магнитами) как объект управления описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} J \frac{d\Omega}{dt} = C \cdot i - T_L; \\ U_a(t) = R_a \cdot i(t) + L_a \cdot \frac{di(t)}{dt} + C \cdot \Omega \end{cases} \quad (3.8)$$

где U_a – напряжение, подаваемое на двигатель, Ω , i – скорость и ток двигателя, J , R , L , C – параметры двигателя, соответственно момент инерции, сопротивление и индуктивность обмотки якоря, коэффициент потока.

Получение уравнения состояния

Зададим векторы состояния и входа $y^T = [\Omega(t), i(t), \varphi(t)]$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \Omega \\ i \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} U_a \\ T_L \end{bmatrix}$$

Следовательно, матрицы параметров имеют следующий вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{C}{J} \\ -\frac{C}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Определение характеристического уравнения объекта

Характеристическое уравнение системы определим по матрицам параметров уравнения состояния (3.9), используя выражение (3.7)

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = 0 \quad (3.10)$$

Подставив в (3.10) выражения для матрицы параметров A и единичной матрицы I , получим характеристическое уравнение

$$\varphi(s) = \det \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{c}{J} \\ -\frac{c}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{c}{J} \\ -\frac{c}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} s & \frac{c}{J} \\ -\frac{c}{L} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.11)$$

$$\varphi(s) = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ} = s^2 + \frac{1}{T_a}s + \frac{1}{T_a \cdot T_m} = T_a \cdot T_m \cdot s^2 + T_m \cdot s + 1 = 0$$

Полученный результат полностью совпадает с известными решениями из теории электропривода, полученные классическими методами.

Определение передаточной матрицы объекта

Определим эквивалентную матрицу передаточных функций, которая связывает векторы состояния и управления по выражению (3.5), которое для нашего случая имеет вид

$$\begin{bmatrix} \Omega \\ i \end{bmatrix} = \mathbf{H}_1(s) \cdot \begin{bmatrix} U_a \\ T_L \end{bmatrix} = (s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} U_a \\ T_L \end{bmatrix}$$

Матрица $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ может быть определена из (3.11)

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & \frac{c}{J} \\ -\frac{c}{L} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

Определим обратную матрицу, помня о том, *adj* – адьюнкт исходной матрицы представляет собой транспонированную матрицу алгебраических дополнений элементов матрицы

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}} \cdot \text{adj} \begin{bmatrix} s & \frac{c}{J} \\ -\frac{c}{L} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}} \cdot \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{c}{J} \\ -\frac{c}{L} & s \end{bmatrix}.$$

Окончательно по формуле (3.5) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}} \cdot \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{c}{J} \\ -\frac{c}{L} & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{c}{L \cdot J} & -\frac{1}{J} \cdot \left(s + \frac{R}{L}\right) \\ \frac{1}{L} \cdot s & \frac{c}{L \cdot J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{c}{L \cdot J}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}} & \frac{-\frac{1}{J} \cdot \left(s + \frac{R}{L}\right)}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}} \\ \frac{\frac{1}{L} \cdot s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}} & \frac{\frac{c}{L \cdot J}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Следовательно, получаем передаточные функции двигателя постоянного тока:

$$\begin{aligned} H_{11}(s) &= \frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{\frac{c}{L \cdot J}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}} & H_{12}(s) &= \frac{\Omega(s)}{T_L(s)} = \frac{-\frac{1}{J} \cdot \left(s + \frac{R}{L}\right)}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}} \\ H_{21}(s) &= \frac{i(s)}{U_a(s)} = \frac{\frac{1}{L} \cdot s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}} & H_{22}(s) &= \frac{i(s)}{T_L(s)} = \frac{\frac{c}{L \cdot J}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{c^2}{LJ}} \end{aligned}$$

Тема 8. Моделювання нелінійностей електромеханічних систем

8.1. Основні нелінійності електромеханічних систем

При розгляді поведінки електромеханічних систем (ЕМС) у перехідних режимах необхідно брати до уваги властиві їм нелінійності.

Нелінійності в системах електропривода можуть бути обумовлені такими чинниками:

1. Нелінійностями механічних характеристик електродвигунів.
Наприклад: механічні характеристики асинхронних двигунів, двигунів постійного струму послідовного і змішаного збудження.
2. Нелінійностями характеристик навантаження (статичного моменту).

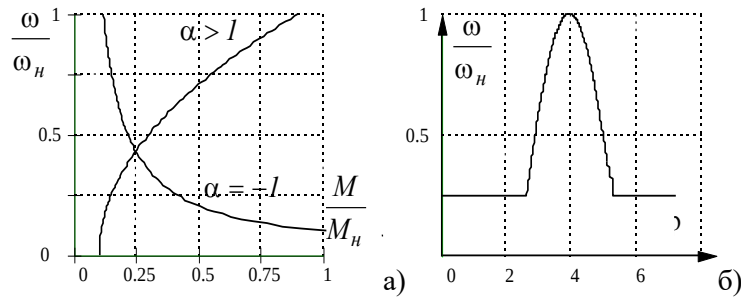


Рисунок 8.1 - Нелінійності обумовлені характеристиками навантаження

Наприклад: вентиляторна характеристика турбомеханізмів ($\alpha > 1$); характеристики металорізальних верстатів ($\alpha = -1$) рис.8.1,а); ножиці для різання металу ($M_{cm} = f(\phi)$) рис.8.1,б).

3. Нелінійностями конструкції і властивостей механічної передачі. Типовими прикладами є наявність у передачах зазорів і люфтів, нелінійність характеристики з'єднання між валами.
4. Нелінійності сил тертя.

а) внутрішнє в'язке тертя визначається силами, що діють у підшипниках і з'єднаннях. Для підшипників ковзання в діапазоні малих швидкостей $M_{cm} = \beta\omega$ (рис.8.2.а) - 1); при великих ω більш точною є нелінійна залежність (рис.8.2.а) - 2);

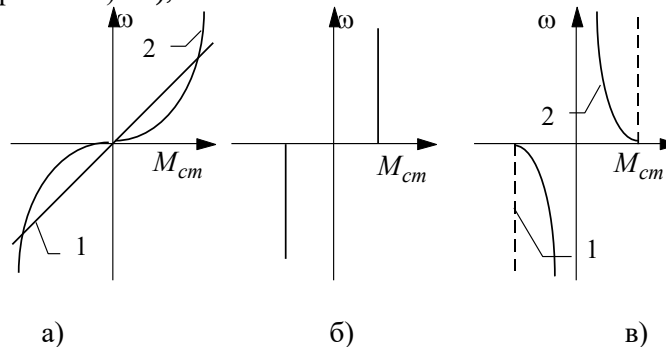


Рисунок 8.2 - Нелінійні характеристики моментів тертя:
а) внутрішнє в'язке тертя; б) кулонівське тертя; в) сухе тертя.

Нелінійні гілки характеристик іноді приблизно замінюють прямими (рис.8.2.а-в).

5. Нелінійності елементів системи керування електропривода.

До нелінійностей, що обумовлені елементами систем керування електропривода відносять нелінійні елементи, за допомогою яких здійснюється струмова відсічка в замкнутих системах автоматичного керування (САК) рис.8.3,а); елементи з обмеженою величиною робочої ділянки робочої

характеристики - магнітні підсилювачі (МП), напівпровідникові суматори (рис.8.3, б); елементи, що мають область насичення (рис.8.3, в) та ін.

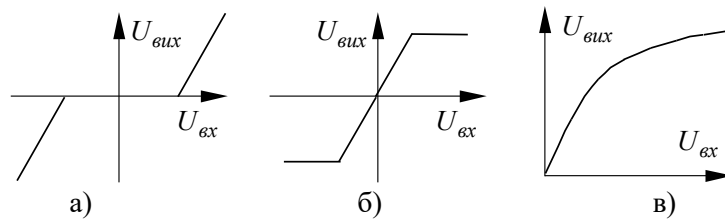


Рисунок 8.3 - Нелінійності елементів систем керування електропривода

6. Нелінійності функціональних впливів.

Нелінійності типу добутку двох функцій, квантування за рівнем і часом у цифрових САК.

7. Нелінійностями, обумовленими властивостями перетворювачів електричної енергії, наприклад, нелінійностями регулювальної характеристики $U_{вих} = f(U_{вх})$ тиристорного перетворювача (рис.8.4.); наявністю зони переривчастих струмів; неповною керованістю перетворювачів та ін.

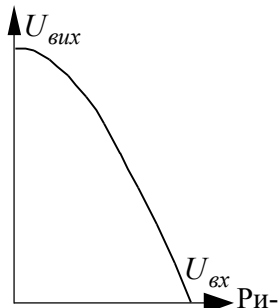


Рисунок 8.4 - Нелінійність регулювальної характеристики

Розглянуті нелінійності є основними, але не вичерпують усієї різноманітності нелінійностей. Електромеханічна система може мати відразу декілька нелінійностей, і необхідно виділити найбільш важливі, що суттєво впливають на показники роботи досліджуваного об'єкта.

Нелінійності можна поділити на дві групи:

- *аналітичні* - такі, що можуть бути представлені системою кусково-неперервних рівнянь.

- *неаналітичні* - такі, що представлені у вигляді графіків або таблиць.

До першої групи належать:

8.1.1 Нелінійність типу «Насичення».

Нелінійність може бути описана такою системою рівнянь:

$$\begin{cases} U_{вих} = \frac{U_0}{U_1} \cdot U_{вх}, & \text{якщо } |U_{вх}| \leq U_1; \\ U_{вих} = U_0 \cdot \text{sign}(U_{вх}), & \text{якщо } |U_{вх}| > U_1, \end{cases}$$

де sign - знакова функція.

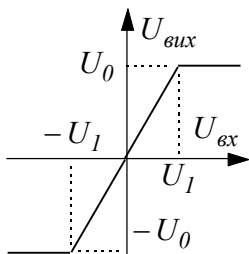


Рисунок 8.5 - Нелінійність типу «обмеження»

У пакеті Simulink нелінійність «Насичення» представлена блоком **Discontinuities/ Saturation**.

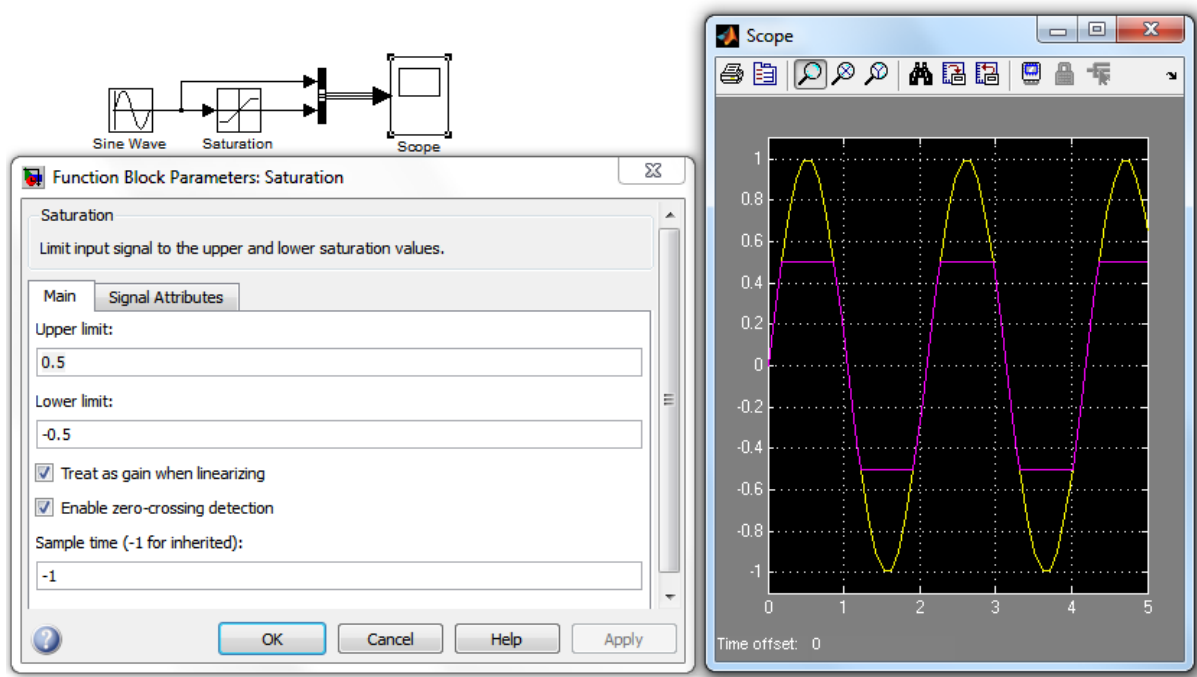


Рисунок 8.6 - Приклад використання блока **Saturation**.

Параметри:

Upper limit - Верхній порог обмеження.

Lower limit - Нижній порог обмеження.

Treat as gain when linearizing (флажок) - Тракувати як підсилювач з коефіцієнтом передачі рівним 1 при лінеаризації.

Вихідний сигнал блоку дорівнює вхідному якщо його величина не виходить за поріг обмеження. Після досягнення вхідним сигналом рівня обмеження вихідний сигнал блоку перестає змінюватися і залишається рівним порогу.

8.1.2 Нелінійність типу "Ідеальне реле"

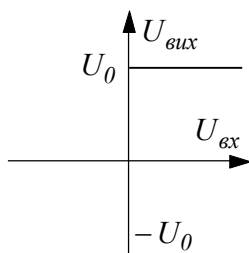


Рисунок 8.7 - Нелінійність типу «ідеальне реле»

Нелінійність може бути описана такою системою рівнянь:

$$U_{вих} = \begin{cases} -U_0, & \text{якщо } U_{вх} \leq 0; \\ U_0, & \text{якщо } U_{вх} > 0, \end{cases}$$

або

$$U_{вих} = U_0 \cdot \text{sign}(U_{вх}).$$

В пакеті Simulink нелінійність «ідеальное реле» можна реалізувати блоком **Math-Operations/ Sign**.

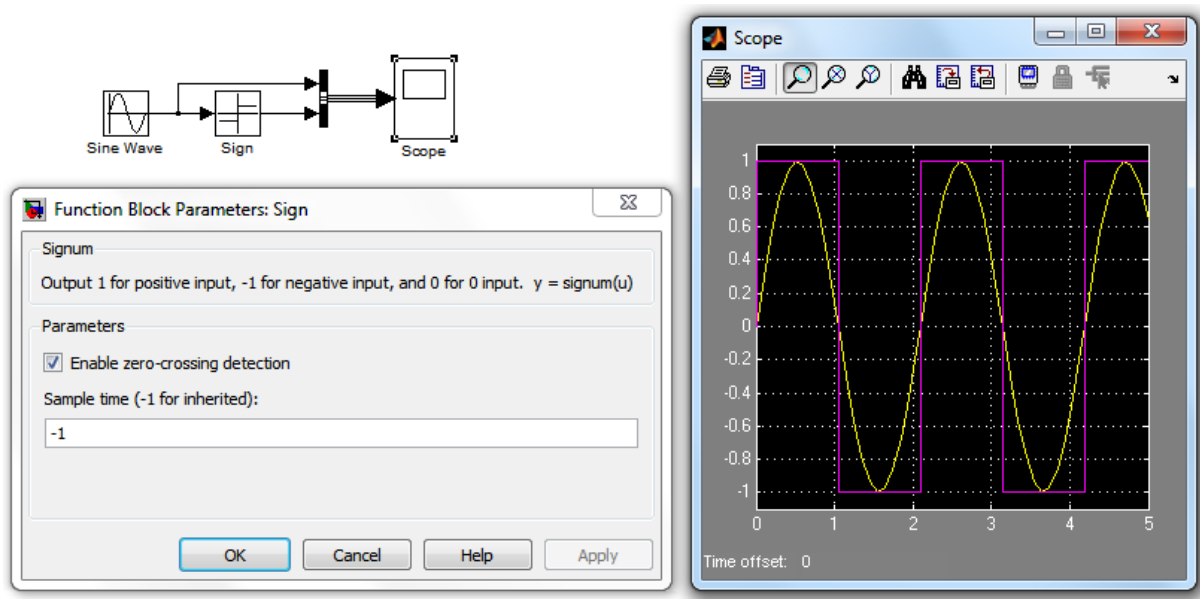
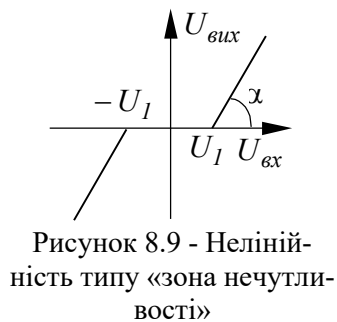


Рисунок 8.8 - Приклад роботи блока **Sign**

8.1.3 Нелінійність типу "Зона нечутливості"



Нелінійність може бути описана такою системою рівнянь:

$$\begin{cases} U_{\text{вих}} = 0, & \text{якщо } |U_{\text{вх}}| \leq U_l; \\ U_{\text{вих}} = a(U_{\text{вх}} - U_l), & \text{якщо } U_{\text{вх}} > U_l; \\ U_{\text{вих}} = a(U_{\text{вх}} + U_l), & \text{якщо } U_{\text{вх}} < -U_l, \end{cases}$$

де $a = \tan \alpha$.

В пакеті Simulink нелінейність «насыщение» представлена блоком **Discontinuities/DeadZone**.

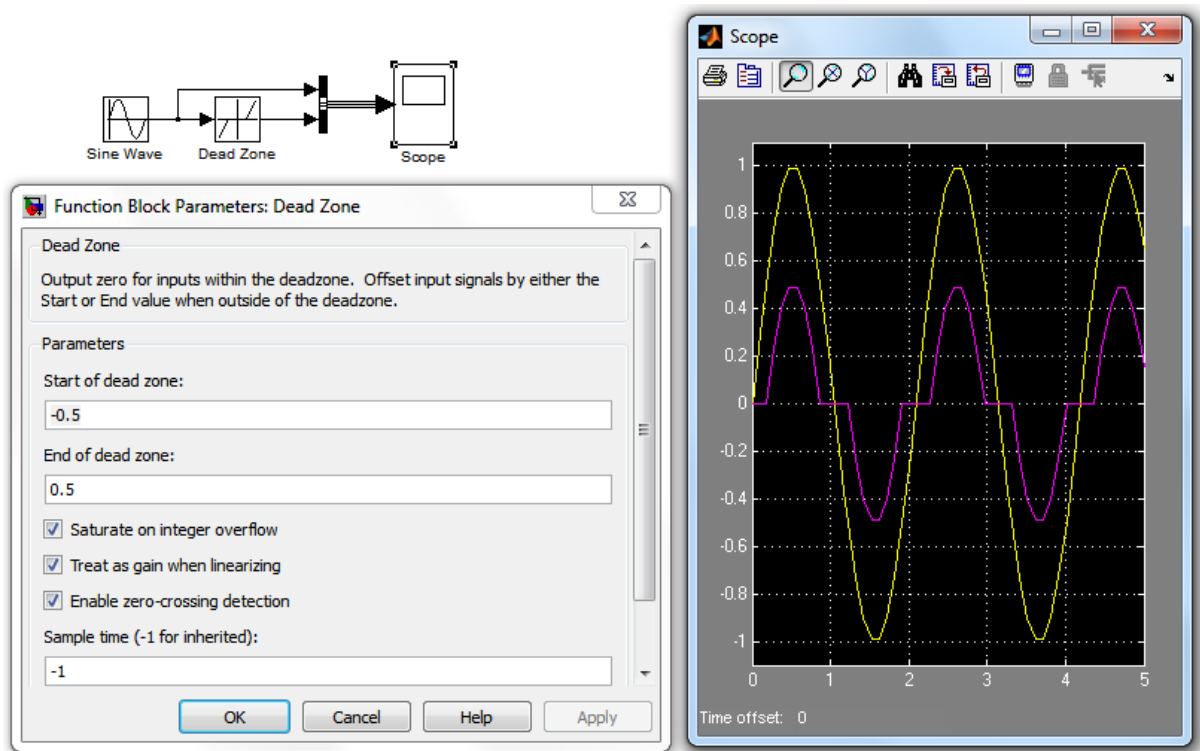


Рисунок 8.10 - Приклад роботи блока **DeadZone**.

Параметри:

Start of dead zone - Початок зони нечутливості (нижній поріг).

End of dead zone - Кінець зони нечутливості (верхній поріг).

Saturate on integer overflow (флажок) - Пригнічувати переповнення цілого. При встановленому прапорці обмеження сигналів цілого типу виконується коректно.

Treat as gain when linearizing (флажок) - Тракувати як підсилювач з коефіцієнтом передачі рівним 1 при лінеаризації.

Вихідний сигнал блоку обчислюється у відповідності з наступним алгоритмом:

Якщо величина вхідного сигналу знаходиться в межах зони нечутливості, то вихідний сигнал блоку дорівнює нулю.

Якщо вхідний сигнал більше або дорівнює верхньому вхідному порогу зони нечутливості, то вихідний сигнал дорівнює вхідному мінус величина порога.

Якщо вхідний сигнал менше або дорівнює нижньому вхідного порога зони нечутливості, то вихідний сигнал дорівнює вхідному мінус величина порога.

8.1.4 Нелінійність типу «реальне реле» або «реле з зоною нечутливості»

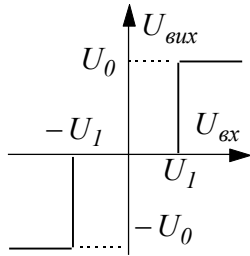


Рисунок 8.11 - Нелінійність типу «реальне реле»

Нелінійність типу "реальне реле" або "реле з зоною нечуттєвості" може бути описана такою системою рівнянь:

$$\begin{cases} U_{вих} = 0, & \text{якщо } |U_{вх}| \leq U_I; \\ U_{вих} = U_0 \cdot \text{sign}(U_{вх}), & \text{якщо } |U_{вх}| > U_I. \end{cases}$$

У пакеті Simulink нелінійність «реле з зоною нечутливості» представлена у вигляді послідовного з'єднання блоків **Discontinuities/DeadZone** и **MathOperations/ Sign**.

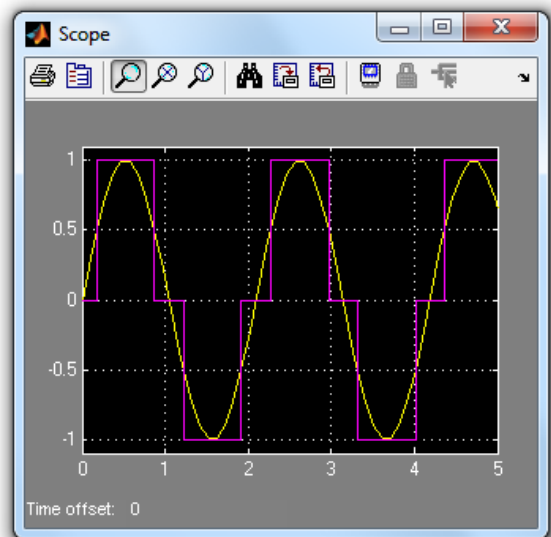
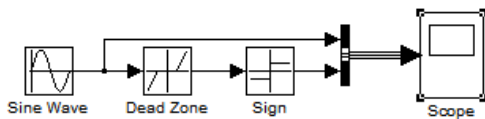


Рисунок 8.12. Приклад роботи нелінійності типу «Реальне реле».

8.1.5 Нелінійність типу «прямокутна петля гістерезиса»

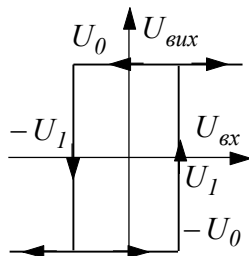


Рисунок 8.13 - Нелінійність типу «реальне реле»

Нелінійність може бути описана такою системою рівнянь:

$$\begin{cases} U_{вих} = 0, & \text{якщо } U_{вх} = U_I; \\ U_{вих} = U_0, & \text{якщо } U_{вх} > -U_I \text{ и } \Delta U_{вх} < 0; \\ U_{вих} = -U_0, & \text{якщо } U_{вх} < U_I \text{ и } \Delta U_{вх} > 0. \end{cases}$$

В пакете Simulink нелінійність «насыщение» представлена блоком **Discontinuities/Relay**.

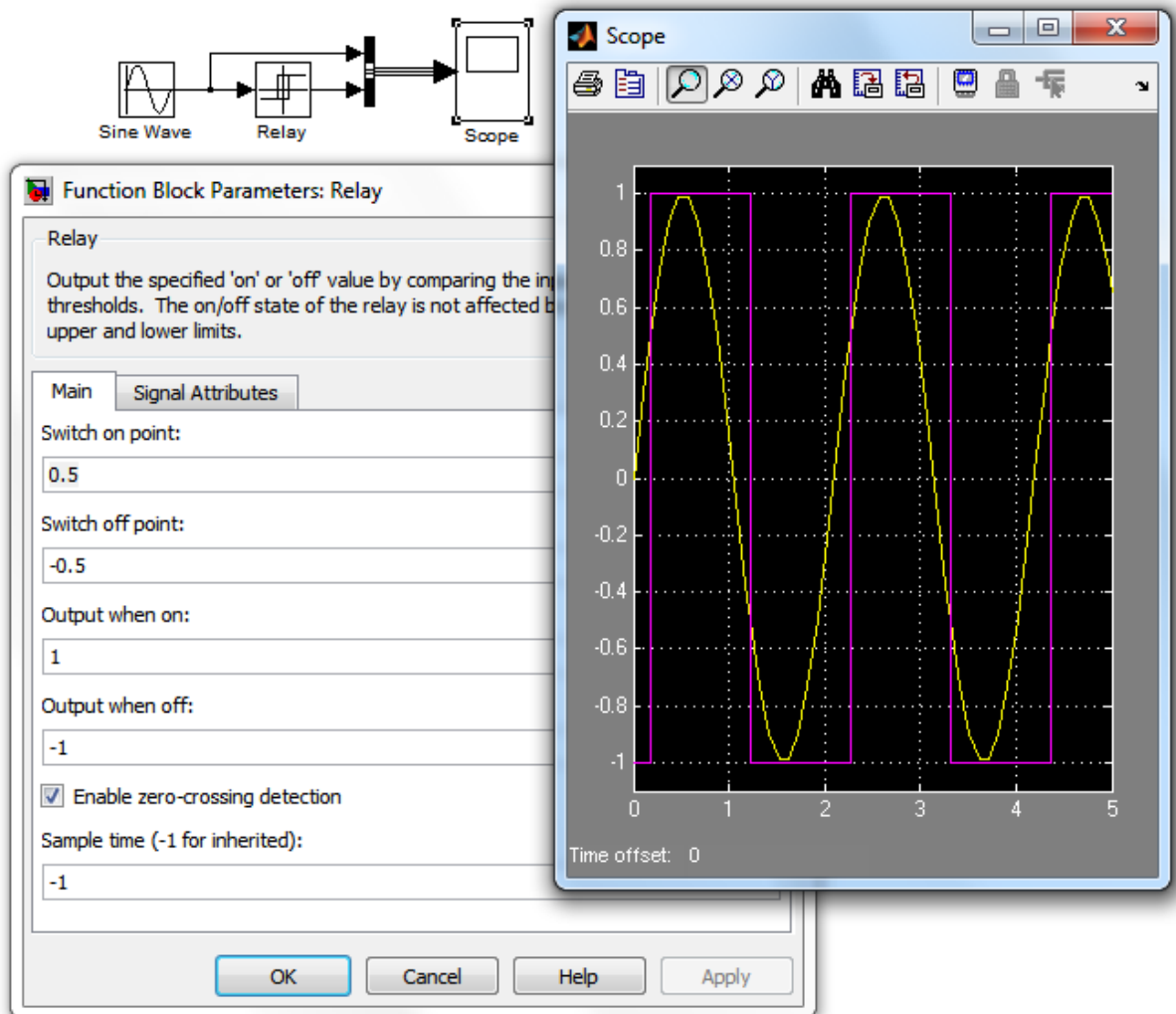


Рисунок 8.14 - Приклад роботи нелінійності типу «Реальне реле з гістерезисом».

Параметри:

Switch on point - Поріг включення. Значення, при якому відбувається включення реле.

Switch off point - Поріг вимкнення. Значення, при якому відбувається виключення реле.

Output when on - Величина вихідного сигналу у включеному стані.

Output when off - Величина вихідного сигналу в вимкненому стані.

Вихідний сигнал блоку може приймати два значення. Одне з них відповідає включеному станом реле, друге - виключеному. Перехід їх одного стану в інший відбувається стрибком при досягненні вхідним сигналом порога включення або виключення реле. У тому випадку якщо пороги включення і виключення реле мають різні значення, то блок реалізує релейний характеристики з гістерезисом. При цьому значення порога включення повинно бути більше, ніж значення порогу виключення.

8.1.6 Нелінійність типу «люфт»

У пакеті Simulink нелінійність «люфт» представлена блоком **Discontinuities/Backlash**.

призначення:

Моделює нелінійність типу «люфт».

Параметри:

Deaband width – Ширина люфта.

Initial output – Початкове значення вихідного сигналу.

Сигнал на виході буде дорівнює заданому значенню **Initial output**, поки вхідний сигнал при зростанні не досягне значення $(\text{Deaband width})/2$ (де U – вхідний сигнал), після чого вихідний сигнал буде дорівнює $U - (\text{Deaband width})/2$. Після того як, відбудеться зміна напрямку зміни вхідного сигналу, він буде залишатися незмінним, поки вхідний сигнал не зміниться на величину $(\text{Deaband width})/2$, після чого вихідний сигнал буде дорівнює $U + (\text{Deaband width})/2$.

На рис. 8.15 показаний приклад роботи блоку **Backlash**. Вхідний сигнал блоку гармонійний з лінійно зростаючою амплітудою.

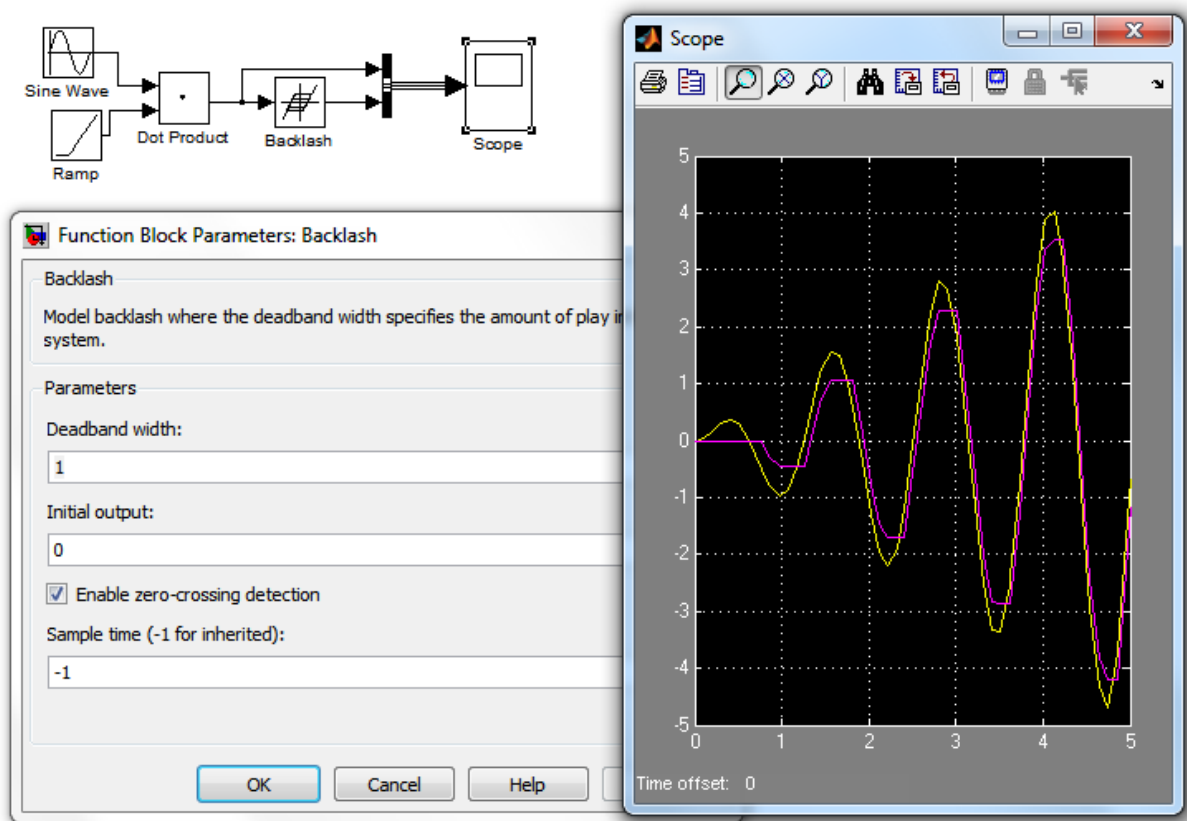


Рисунок 8.15 - Пример работы нелинейности типа «Люфт».

З наведених прикладів опису видно, що нелінійності подаються у вигляді сукупності операторів присвоювання і логічних функцій.

8.2 Неаналітичні нелінійності

Неаналітичні нелінійності - такі, що не можуть бути описані аналітичними виразами.

До другої групи відносяться нелінійності обумовлені кривими намагнічування, вольт-амперними характеристиками нелінійних опорів тощо.

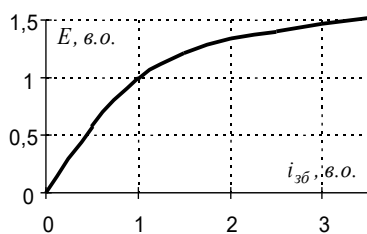


Рисунок 8.16 - Нелінійна крива намагнічування

Типовим, широко поширеним прикладом такої нелінійності є крива намагнічування (рис.8.16.). Початкова ділянка - це практично пряма лінія, далі - крива.

Існує два основних методи моделювання нелінійностей заданих таблицями та графіками: інтерполяція та апроксимація.

Інтерполяція. Нелінійність задається у вигляді таблиці значень у дискретних точках, а значення функції в проміжних точках можуть бути знайдені за допомогою різних інтерполяційних алгоритмів, наприклад, методи Лагранжа, Ньютона, Стірлінга й ін.

Апроксимація. За допомогою відомих чисельних методів (наприклад - найменших квадратів) підбирається аналітичний вираз для нелінійності. Апроксимація функцій це більш загальний процес, ніж інтерполяція, тому у деяких випадках отримати простий аналітичний вираз нелегко. У таблиці 8.2. наведені приклади апроксимації нормованої кривої намагнічування, що задана таблицею 8.1.

Таблиця 8.1.

Нормована крива намагнічування

i , в.о.	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	8.0	8.5
E , в.о.	0.58	1.0	1.21	1.33	1.4	1.46	1.51

Таблиця 8.2.

Параметри апроксимуючої функції кривої намагнічення

a	b	c	d	e
1. $E = \frac{a \cdot b + c \cdot i_{30}^d}{b + i_{30}^d}$,				
помилка $S = 0.0161842$, коефіцієнт кореляції, $r = 0.9997536$				
- 0.0006763	0.6830981	1.6691347	1.4405316	-
2. $E = a + b \cdot i_{30} + c \cdot i_{30}^2 + d \cdot i_{30}^3 + e \cdot i_{30}^4$,				
помилка $S = 0.0083557$, коефіцієнт кореляції, $r = 0.9999179$				
- 0.0066045	1.5009997	- 0.6301088	0.1269412	- 0.0097902
8. $E = a(1 - e^{b \cdot i_{30}})$,				
помилка $S = 0.0174020$, коефіцієнт кореляції, $r = 0.9995014$				
1.5497733	- 0.9904069 7	-	-	-
4. $E = a(b - e^{c \cdot i_{30}})$,				
помилка $S = 0.0186582$, коефіцієнт кореляції, $r = 0.9995087$				
1.5541374	0.9965776	0.9952512	-	-
5. $E = \frac{a + b \cdot i_{30}}{1 + c \cdot i_{30} + d \cdot i_{30}^2}$,				
помилка $S = 0.0237487$, коефіцієнт кореляції, $r = 0.9993367$				
-0.0065968	1.6224211	0.6113947	0.0514903	-

8.3 Математичне моделювання моменту опору робочої машини

Зазвичай двигун приводить в дію виробничий механізм через систему передач, окремі елементи якої рухаються з різними швидкостями. Орієнтовна кінематична схема електроприводу з обортовим рухом виконавчого механізму представлена на рис. 8.17.

Часто в робочих механізмах один з елементів здійснює обертальний рух, інші - поступальний, наприклад, в таких машинах, як підйомник (рис. 8.18), кран, стругальний верстат і т.п.

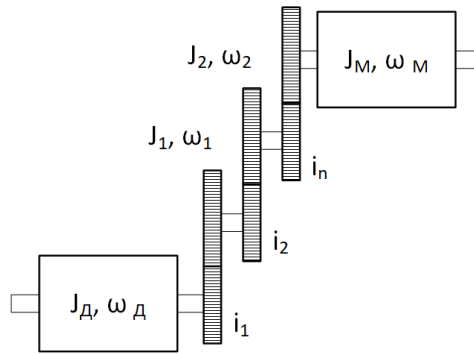


Рисунок 8.17 – Кінематична схема зв'язку двигуна з виконавчим механізмом

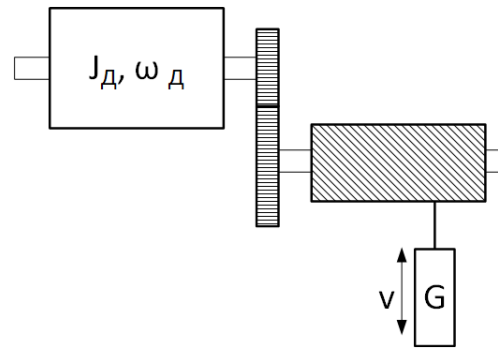


Рисунок 8.18 – Кінематична схема приводу підйомника

Механічна частина електропривода може являти собою складну кінематичну ланцюг з великим числом рухомих елементів. Кожен з елементів реальної кінематичного кола володіє пружністю, тобто деформується під навантаженням, а в з'єднаннях елементів є повітряні зазори. Якщо враховувати ці фактори, то розрахункова схема механічної частини приводу буде представлена багатомасовою механічною системою з пружними зв'язками і зазорами, розрахунок динаміки якої становить великі труднощі і можливий тільки за допомогою ЕОМ. Однак основні закономірності руху таких систем визначаються найбільшими масами і зазорами і найменшими твердостями зв'язків системи, що дозволяє звести розрахункову схему механічної частини приводу або до трехмасової, або до двухмасової механічної системи з еквівалентними пружними зв'язками і з сумарним зазором (або без нього), наведеними до кутової швидкості вала двигуна. Але і ці розрахункові схеми використовуються в тих відповідальних випадках, де зневага пружності і зазором приведе до більших помилок розрахунку (точні стежать радіоте-лескопов і металорізальних верстатів; механізми з гнучкими зв'язками, довгими валами, канатами; різкі зміни стану системи і т.п.).

У більшості практичних випадків в інженерних розрахунках при вирішенні завдань, що не вимагають великої точності, і для механічних ланок, що володіють невеликими проміжками і незначною пружністю (великий жорсткістю), можна знехтувати зазорами і пружністю, прийнявши механічні зв'язки абсолютно жорсткими. При цьому допущенні рух одного елемента дає повну інформацію про рух всіх інших елементів, по-цьому рух електроприводу можна розглядати на якомусь одному механічному елементі. Зазвичай в якості такого елемента приймають вал двигуна.

Момент опору механізму $M_{см1}$ (рис. 8.11), що виникає на валу робочої машини, складається з двох доданків, відповідно корисної роботи і роботи тертя.

Моменти опору можна розділити на дві категорії, а саме: 1) реактивні моменти і 2) активні або потенційні моменти.

В першу категорію включаються моменти опору від стиснення, різання, моменти тертя тощо. Що перешкоджають руху приводу і змінюють свої знак при зміні напрямку обертання.

До другої категорії входять моменти від сили тяжіння, а також від розтягування, стиснення і скручування пружних тел. Ці моменти можуть бути названі потенційними, оскільки вони пов'язані зі зміною потенційної енергії окремих елементів приводу.

Залежність між приведеними до валу двигуна швидкістю та моментом опору механізму $\omega = f(M_c)$ називають механічною характеристикою робочої машини.

У загальному випадку механічні характеристики робочих машин описуються за допомогою емпіричної формули Бланка:

$$M_c = M_0 + k \left(\frac{\omega}{\omega_{ном}} \right)^p$$

де k коефіцієнт, що враховує режими роботи механізму; p показник ступеня; ω_0 номінальна кутова швидкість, при якій момент опору дорівнює номінальному; M_0 момент холостого ходу машини, який враховує постійну складову моменту опору, що не залежить від швидкості.

1. Не залежить від швидкості механічна характеристика (пряма 1 на рис. 8.19). При цьому $p = 0$ і момент опору M_c не залежить від швидкості. Такий характеристикою володіють, наприклад, підйомні Кранов, лебідки, механізми подачі металорізальних верстатів, поршневі насоси при незмінній висоті подачі, конвеєри з постійною масою пересуватися матеріалу. Сюди ж можуть бути віднесені з відомим наближенням всі механізми, у яких основним моментом опору є момент тертя, так як зазвичай в межах робочих швидкостей момент тертя змінюється мало.

2. Нелінійно-зростаюча (параболічна) механічна характеристика (крива 3 на рис. 8.19). Цією характеристиці відповідає $p = 2$; момент опору M_c тут залежить від квадрата швидкості. Механізми, що володіють такою характеристикою, називають іноді механізмами з вентиляторним моментом, оскільки у вентиляторів момент опору залежить від квадрата швидкості. До механізмів, що мають параболічну механічну характеристику, відносяться також відцентрові насоси, гребні гвинти тощо.

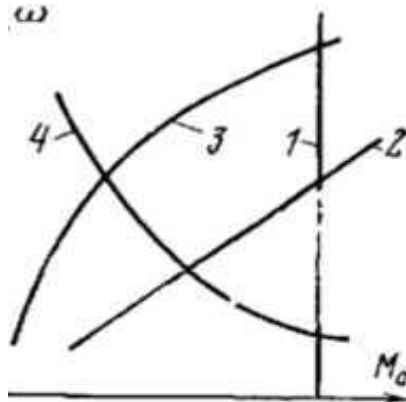


Рисунок 8.19 – Типові механічні характеристики виробничих механізмів

3. Нелінійно - спадає механічна характеристика (крива 4 на рис. 8.19). При цьому $p = -1$ і момент опору M_c змінюється обернено пропорційно швидкості, а потужність, споживана механізмом, залишається постійною. Такий характеристикою володіють, наприклад, деякі металорізальні верстати, моталки в металургійній промисловості і т.п. Ці характеристики не вичерпують всіх практично можливих випадків, але дають уявлення про характеристики деяких типових виробничих механізмів.

Однак, формула Бланка не дає повного уявлення про неймовірній різноманітності механічних характеристик робочої машини.

Крім того, формула Бланка має дуже великою похибкою в області запуску, при рушанні механізму, в самій початковій стадії пуску.

Це пов'язано, в першу чергу, з тим, що сили тертя спокою і тертя ковзання істотно розрізняються по величині. Тому, при рушанні моменти опору, обумовлені силами тертя спокою, можуть істотно, в рази, перевищувати момент, створений силами тертя ковзання.

Підшипники ковзання мають специфічні механізми зношування порівняно з підшипниками кочення.

Незважаючи на те, що підшипник ковзання складається всього з трьох елементів – з антифрикційного вкладиша, частини поверхні вала – підшипникової шийки, і шару мастила між ними. Тертя в підшипнику ковзання істотно залежить від режиму змащування – умов роботи змащуваних деталей механізмів, що визначають їх контактну взаємодію під час тертя.

Режими змащування зручно розглядати за допомогою діаграми Герсі–Штрибека, (рис. 8.20).

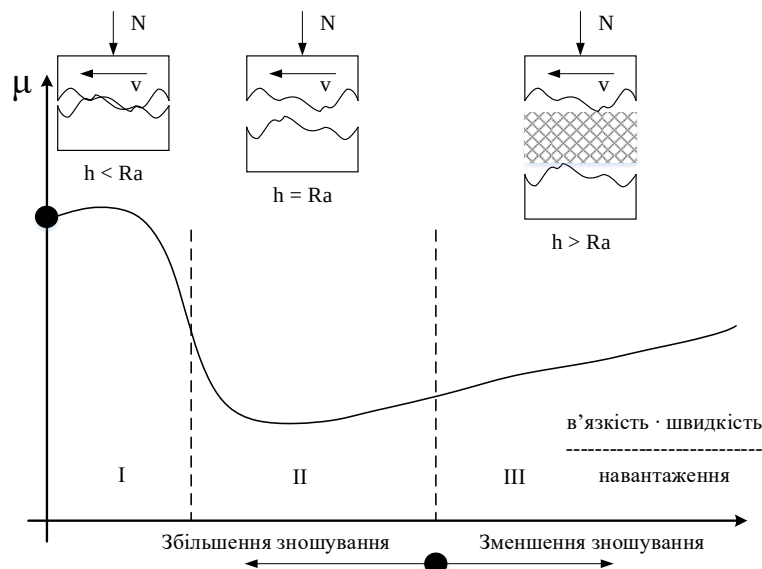


Рисунок 8.20 – Діаграма Герсі–Штрибека – залежність коефіцієнта тертя від режиму роботи підшипника:

I – граничне змащування; II – змішане змащування; III – гідродинамічний режим змащування

Залежність коефіцієнта тертя підшипника ковзання від його частоти обертання називають кривою Штрибека, яка зображена на рис. 8.21.

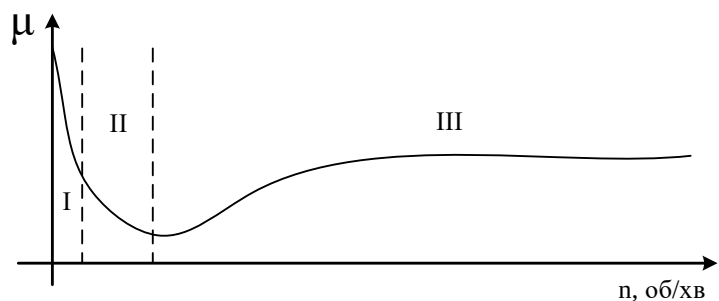


Рисунок 8.21 – Крива Штрибека – залежність коефіцієнта тертя від частоти обертання під час запуску електроприводу:

I – граничне змащування; II – змішане змащування; III – гідродинамічний режим змащування

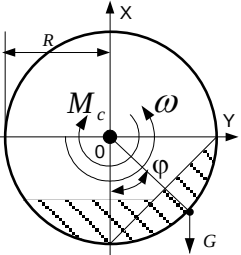
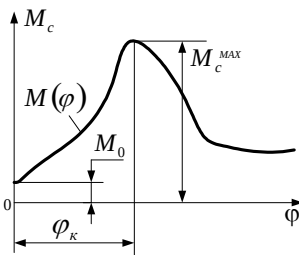
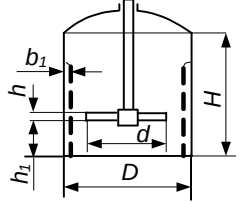
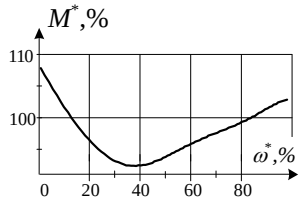
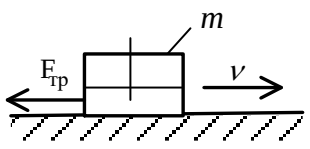
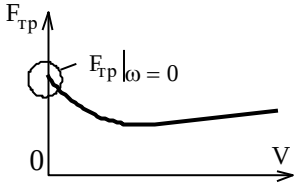
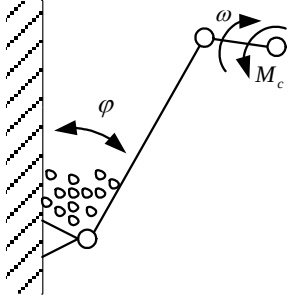
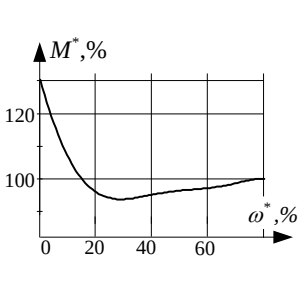
Отже, саме запуск агрегату є тим процесом, який визначально впливає на зношування та технічний ресурс підшипника ковзання.

Також момент опору підшипника, який виникає за граничного режиму змащування, виявляється істотно, до 7 – 10 разів вищим за момент опору підшипника в гідродинамічному режимі змащування, що призводить до виникнення значних моментів опору в режимі рухання електроприводу.

Таблиця 8.3

Класифікація механізмів з важкими умовами запуску за конструктивними особливостями

Кінематична схема	Механічна характеристика
Механізми, силові машинні агрегати, що запускаються без навантаження на валу (наприклад, електроприводи по системі Г-Д)	
Насоси для транспортування гідросумішей і нафтопродуктів, що запускаються з змуленим робочим колесом	
Механізми для дроблення, огрудування, сушки, перемішування з використанням млинів	

	
Механізми з активаторами перемішування гідросумішей і рідин	
	
Механізми безперервного транспорту, що працюють на відкритому повітрі, з підвищеним моментом опору при русанні (наприклад, через застигання мастила при низькій температурі)	
	
Дробарки і подрібнювачі, що запускаються під завалом	
	

Список рекомендованої літератури

1. Моделювання електромеханічних систем: Підручник / О.П. Чорний, А.В. Луговой, Д.Й. Родькін, Г.Ю. Сисюк, А.В. Садовой. Кременчук, 2001. 376 с.
2. Садовой О.В., Дерещ О.Л. Спеціальні питання математичного опису і моделювання динаміки складних систем. Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2014. 206 с.
3. Моделювання електромеханічних систем. Математичне моделювання систем асинхронного електроприводу: навчальний посібник / О. І. Толочко. Київ : НТУУ«КПІ», 2016. 150 с. Іл.
4. Шахно С.М. Чисельні методи лінійної алгебри / Шахно С.М. Навч. посібник. Львів : Видавничий центр ім. Івана Франка, 2006. 250 с.
5. Фельдман Л.П. Чисельні методи в інформатиці / Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Київ : Видавнича група BHV, 2006. 480 с.
6. Мокін, Б. І. Математичні методи ідентифікації динамічних систем : навчальний посібник / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін. Вінниця : ВНТУ, 2010. 260 с.
7. Лозинський А.О., Мороз В.І., Паранчук Я.С. Розв'язання задач електромеханіки в середовищах пакетів MathCAD і MATLAB: Навчальний посібник. Львів : Видавництво Державного університету "Львівська політехніка", 2000. 166.
8. Довгань С.М. Дослідження систем електропривода методами математичного моделювання : навч. посіб. Дніпропетровськ : Видавництво НГА України, 2001. 137 с.
9. SimPowerSystems User's Guide. / Hydro-Quebec and The MathWorks, Inc., 2009. 402 p.
10. Dingyu X., Feng P. MatLAB and Simulink in Action: Programming, Scientific Computing and Simulation. Springer, 2024. 472 p. ISBN 978-981-99-1175-2.
11. Palm III William J. MatLAB for Engineering Applications. 5th Edition. McGraw-Hill LLC, 2023. 656 p. ISBN 978-1-265-13919-3.
12. Eshkabilov S. Beginning MatLAB and Simulink: From Beginner to Pro. 2nd Edition. Apress, 2022. 627 p.
13. MathWorks. MatLAB Coder User's Guide R2021a. The MathWorks, Inc., 2021. 1298 p.
14. Lopez C. MatLAB Matrix Algebra. N.-Y.: Springer, 2014. 240p.
15. Asadi Farzin. Applied Numerical Analysis with MatLAB/Simulink: For Engineers and Scientists. Springer, 2023. 327 p. ISBN 978-3-031-19365-1.
16. Yao Ray. MatLAB Programming in 8 Hours, For Beginners, Learn Coding Fast: MatLAB Quick start Guide & Exercises. Independently published, 2021. 121 p. ASIN B08ZSRXTYC.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Конспект лекцій з дисципліни «Математичні моделі та програмні засоби розв'язання комплексних практичних задач електротехніки та електромеханіки» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань: G «Інженерія, виробництво та будівництво», спеціальність: G3 «Електрична інженерія».

Укладач: Валерій Титюк

Реєстраційний № ____ від _____ 2025 р.

Підписано до друку _____ 2025 р.

Формат А5

Обсяг 94 стор.

Тираж _____ прим.

м. Кривий Ріг,
вул. Віталія Матусевича, 11