

Криворізький національний університет
Кафедра електричної інженерії

БЕРІДЗЕ Т. М.

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
ТЕОРІЯ АТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

(Складено на основі: Ладанюк А.П. Теорія автоматичного керування: курс лекцій (частина перша) – К.: НУХТ, 2004. 124 с.; Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування: Підручник. – К.: Либідь, 1997. 544 с.)

Кривий Ріг
2023

Опорний конспект лекцій з дисципліни «Теорія автоматичного керування» розроблено згідно ОПП першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» галузі знань 14 «Електрична інженерія» кваліфікація: бакалавр з електроенергетики, електротехніки та електромеханіки 2023 р.

Розробник:

Тетяна Берідзе – докт. екон. наук, професор кафедри електричної інженерії

Рецензент:

Юрій Осадчук – канд. техн. наук, доцент кафедри електричної інженерії

Робоча програма затверджена на засіданні кафедри електричної інженерії
Протокол № 1 від 1 вересня 2023 року

Завідувач кафедри _____ (Олег Сінчук)

ЗМІСТ

НАЗВА	стр
ВСТУП	3
1. Коротка історія виникнення та розвитку теорії автоматичного керування	4
2. Класифікація систем автоматичного керування	8
3. Загальна характеристика процесів у системі автоматичного керування	14
4. Математичний опис лінійних систем автоматичного керування	17
5. Типові елементарні ланки та їх характеристики	24
6. Аналіз стійкості лінійних систем	29
7. Показники перехідних процесів	37
8. Критерії якості перехідних процесів АСР	40
9. Точність та чутливість АСР	45
10. Методи аналізу і синтезу лінійних систем керування.	50
11. Часові методи аналізу і синтезу систем керування	53
12. Частотні методи аналізу та синтезу АСР.	57
13. Визначення оптимальних параметрів системи.	65
ЛІТЕРАТУРА	74

ВСТУП

Сучасні системи керування мають складну багаторівневу (ієрархічну) структуру, в якій використовуються обчислювальні мережі різного рівня на основі ЕОМ та мікропроцесорних засобів. Для складних технологічних об'єктів розробляються системи керування, які також мають достатньо складну структуру і розвинені зв'язки між окремими частинами (елементами). Теорія автоматичного керування виявляє загальні закономірності функціонування, які притаманні автоматичним системам різної природи, і на основі цього розробляє принципи побудови ефективних систем для керування об'єктами різного призначення. При вивченні процесів керування в теорії автоматичного керування абстрагуються від фізичних та конструктивних особливостей систем і замість реальних систем розглядаються їх адекватні математичні моделі. За допомогою цих моделей розв'язуються основні задачі – аналізу та синтезу автоматичних систем. Тому підготовка спеціалістів з високим рівнем теоретичних знань і практичних навичок спонукає до необхідності вивчення сучасними студентами дисципліни «Теорія автоматичного керування».

1. Коротка історія виникнення та розвитку ТАК

Ще в давнину первісні люди намагалися створити пристрої, що полегшують їм життя. Мабуть, першими автоматичними (тобто працюючими без безпосередньої участі людини) пристроями можна вважати пастки для полювання на диких тварин.

Наступний етап розвитку людства – рабовласницьке суспільство – характеризувався, з погляду розвитку автоматизації, появою автоматів, призначених переважно для розваги та потреб культу. Ці пристрої, що об'єднують чималу кількість елементів, були здатні здійснювати складні взаємопов'язані рухи. Вони отримують подальший розвиток окремі деталі та елементи, які використовувалися й у пастках.

Ще один період історії - феодалізм. Тут широке поширення отримало виробництво годинникових механізмів та млинів. Винахід таких елементів, як маятник, балансир, анкерний хід дозволило створити досить точні для того часу годинникові механізми, а в млинах вже діяли такі високоавтоматизовані пристрої, як механізм, що просіває, і механізм потряски. У млинах вже були всі істотні елементи машин: двигун (спочатку, звичайно, водяний або вітряний), передавальний механізм, робоча машина.

Промисловий переворот в Європі почався з винаходом парових машин і таких пристроїв як супорт і прядильний механізм, що дозволяли автоматизувати відповідні робочі процеси. Власне, з цього моменту стало можливим виробництво машин за допомогою машин. Принцип дії парової машини всім відомий і зрозуміло, що для нормальної її роботи необхідно постійне надходження води в паровий котел. Тому ясно, наскільки був радий лінивий оператор парової машини після винаходу І. І. Ползуновим поплавкового регулятора рівня води в котлі. Принцип дії цього регулятора дуже простий знайомий кожному, хто хоч раз розбирав (або збирав) змивний бачок унітазу.

Наступний винахід автоматичного регулятора пов'язано з необхідністю підтримки постійної швидкості обертання валу парової машини в ткацькому виробництві, при металообробці, в борошномельному виробництві та ін. Це регулятор Уатта, який складався з двох вантажів, що підвішені на шарнірах уздовж вертикальної осі валу. Вантажі системи важелів пов'язані з заслінкою, що перекриває отвір, через яке надходить пара з котла в циліндр парової машини. Конструкція важелів та заслінки була такою, щоб переріз отвору для проходу пари забезпечував задану швидкість обертання валу. Якщо ця швидкість збільшувалася, грузики під дією відцентрової сили розходилися, зменшуючи через систему важелів і заслінку надходження пари в циліндр і тим самим зменшуючи швидкість обертання. Якщо швидкість обертання з якихось причин зменшувалася, то вантажі опускалися і пересували заслінку таким чином, щоб збільшити впуск пари в циліндр. Таким чином, регулятор Уатта, замінюючи людину, виконував деяку керуючу функцію «... якщо швидкість машини більша за потрібну, слід зменшити впуск пари, якщо менше, то впуск пари треба збільшити».

Перелічимо в хронологічному порядку відомі факти винаходи перших регуляторів: маятниковий регулятор ходу годин (Х. Гюй-генс, 1675 р.), поплавковий регулятор рівня води в котлі парової машини (І.І. Ползунов, 1765 р.), відцентровий регулятор швидкості обертання валу парової машини (Дж. Уатт, 1784), програмний пристрій керування ткацьким верстатом за допомогою перфокарти (Ж. Жаккар, 1808), різні регулятори (Ж. Понселе, брати Сіменс, 1830 р.).

Простота принципу дії регулятора Уатта і широке поширення парових машин (досить сказати, що тільки в Англії в кінці 19-го століття було більше 75 тисяч парових машин) призвели до великого розмаїття конструкцій систем «парова машина – регулятор Уат-та». Досвід експлуатації деяких з таких систем був сумним: парова машина виходила з-під контролю (говорячи сучасною мовою, система ставала нестійкою). Пошук причин такої поведінки машин і дав поштовх розвитку теорії автоматичного керування.

Найранішою друкованою роботою, що дійшла до нас, вважається публікація Д.С. Чиждова (1823). Але на практику проектування регуляторів ця робота особливого впливу не мала. Корінний перелом у підході до проблеми і методології досліджень внесли три основні роботи: англійського фізика Дж. К.Максвелла (роки життя 1831-79 рр.) «Про регулятори» (1868 р.) і російського вченого І.А. Вишнеградського (роки життя 1832-95 рр.) «Про загальну теорію регуляторів» (1876 р.) і «Про регулятори прямої дії» (1877 р.). Дж. К.Максвелл та І.А. Вишнеградський розглянули парову машину і регулятор як єдину динамічну систему, обґрунтували загальний методологічний підхід до дослідження систем різної фізичної природи, заклали основи теорії стійкості, встановили ряд важливих закономірностей регулювання за принципом зворотного зв'язку. Великий внесок у розвиток теорії автоматичного регулювання вніс Н.Є. Жуковський, автор першого підручника «Теорія регулювання ходу машин» (1909). Говорячи про основоположників ТАК як науки, не можна не згадати про роботи словацького теплотехніка А. Стодоли (1859-1942 рр.) та російського математика А.А. Ляпунова (1857-1918 рр.).

Історію розвитку ТАК можна умовно поділити на два етапи: класичний (з початку 70-х років 19-го століття - до 40-х років 20-го століття), сучасний (з 50-х років 20-го століття до теперішнього часу).

Історично першою була поставлена найпростіша задача керування, що полягає у підтримці заздалегідь заданих, постійних у часі значень виходу об'єкта при змін, що змінюються, що діють на нього. Початковий етап розвитку ТАУ характеризувався детерміністським підходом до постановки та вирішення завдань керування.

Бурхливий та інтенсивний розвиток отримала теорія автоматичного керування після Другої світової війни. Це зумовлено виникненням та розвитком космічної та ракетної техніки, появою та стрімким удосконаленням електронно-обчислювальних машин, засобів сучасного зв'язку, радіоелектроніки та використанням ядерної енергії.

Теорія автоматичного керування на всіх етапах свого розвитку з одного боку спиралася на суворі математичні методи вивчення процесів керування та проектування систем керування, з другого боку, сама стимулювала розвиток цих методів. Окремі розділи математики були викликані життя потребами теорії керування. Такий симбіоз дав чудові результати, і в даний час буквально всі навколишні технічні пристрої містять ту чи іншу кількість автоматичних регуляторів. Автопілот, система самонаведення ракети на ціль, стабілізатор напруги, автоматичне регулювання посилення в телевізійних та радіоприймачах, верстати з числовим програмним керуванням, система стабілізації швидкості обертання диска вінчестера в комп'ютерах, термостат холодильника і т.д. і т.п. – це приклади систем автоматичного керування (САК).¹¹

Основні поняття та визначення. Місце ТАК у системі наук про керування.

Насамперед, треба домовитися, що таке керування. Керування яким-небудь об'єктом - це вплив на нього з метою забезпечення необхідного перебігу процесів у ньому і (або) необхідного зміни його стану.

Взагалі кажучи, наука, яка займається проблемами керування – це кібернетика. Більш конкретно, кібернетика - наука про загальні закономірності процесів керування - ґрунтується на вивченні об'єктів керування при зовнішніх впливах, отриманні інформації про протікання процесів у цих об'єктах і вироблення керуючих впливів, що забезпечують оптимальне в певному сенсі стан об'єктів.

Всю кібернетику умовно можна розділити на теоретичну кібернетику.

Предметом розгляду теоретичної кібернетики є алгоритмічні мови, теорія алгоритмів, теорія ідентифікації, штучний інтелект і т.п.

Об'єктами керування може бути: живі організми, колективи людей, виробничі підприємства, цехи, виробничі процеси, окремі верстати, машини, технічні устрою тощо. Відповідно

с цим прикладну кібернетику можна розділити на біокібернетику, кібернетику організаційних систем, технічну кібернетику тощо. Розділами технічної кібернетики є теорія інформаційних пристроїв і теорія автоматичного керування. Теорія інформаційних пристроїв пов'язана зі збором, переробкою та передачею інформації, необхідної для керування технічними об'єктами людиною. Теорія автоматичного керування займається керуванням технічними пристроями без безпосередньої участі людини.

Таким чином, керування без участі людини називається автоматичним, а автоматичне керування технічними об'єктами є предметом розгляду ТАК.

Для реалізації автоматичного керування необхідно мати те, чим керують, тобто об'єкт керування, і те, що керує, тобто автоматичний керуючий пристрій (УУ) або регулятор. Сукупність керованого об'єкта і регулятора називають системою автоматичного керування (САК) або автоматичною системою керування.

Стан об'єкта визначається рядом величин, що характеризують як вплив на об'єкт зовнішнього середовища та керуючих пристроїв, так і перебіг процесів усередині самого об'єкта. Одні з цих величин вимярюються в процесі керування

і називаються контрольованими. Інші, що впливають режим роботи об'єкта, не вимірюються і називаються неконтрольованими. Які з величин мають бути контрольовані, які неконтрольовані, залежить від мети керування.

Фізична величина, що підлягає управлінню (напруга, швидкість, кутове положення, температура, тиск і т.д.), називається керованою величиною Y . У САК діє багато впливів, основні з яких: керуючий вплив U , що обурює вплив F і вплив G (рис. 1.1).

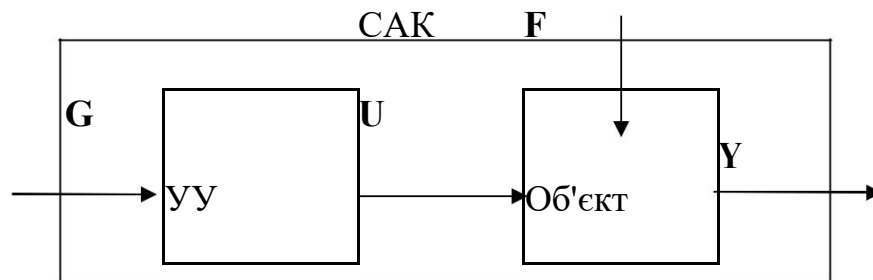


Рис. 1. Функціональна схема САК

Поняття "вплив" при вирішенні завдань керування розглядається тільки в інформаційному сенсі.

Збурюючий вплив викликає небажані, а часто й непередбачувані відхилення керованої величини. Це шуми або перешкоди, які можуть бути зовнішніми або внутрішніми.

Дія, що задає, надходить на вхід керуючого пристрою є заздалегідь передбаченим впливом. Це команда, наказ УУ, згідно з яким за певним алгоритмом останнє здійснює керуючий вплив на об'єкт. Всі перелічені вище впливу можуть бути як скалярними, так і векторними величинами. склад УУ можуть входити вимірювальний елемент (чутливий елемент або датчик Д) та виконавчий пристрій (виконавчий механізм ІМ) (рис. 1.2). Завдання датчика – перетворення вступника на його вхід інформації у форму, зручну для подальшої переробки (зазвичай сигнал у вигляді струму або напруги).

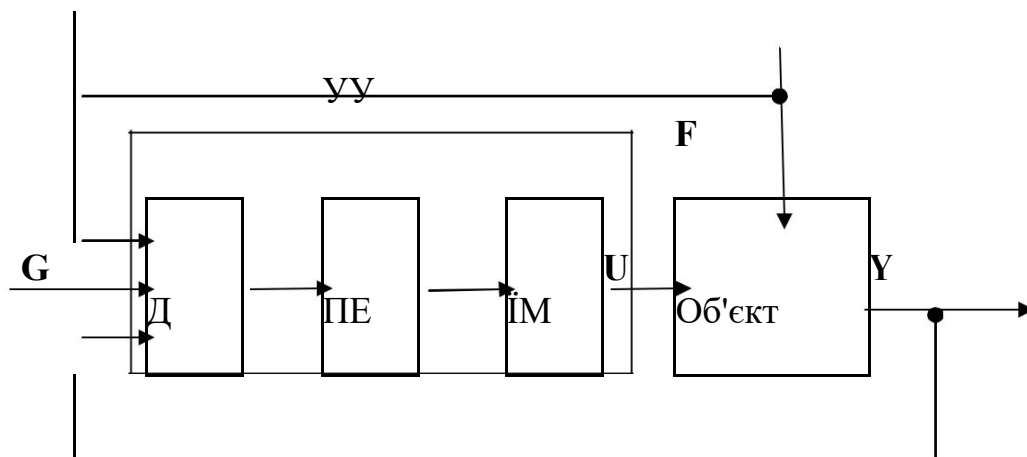


Рис. 2. Уточнена функціональна схема

Існує безліч різних видів і типів датчиків: датчики положення, швидкості, прискорення, температури, тиску і т.д. У загальному випадку, як це буде ясно з подальшого викладу, на вхід датчиків може надходити також інформація про обурювальні впливи і про керовану величину. Це також відбито на рис.1.2.

Виконавчий механізм призначений для безпосереднього на об'єкт, наприклад, у разі автопілота – це електроприводи елеронів літака.

Між датчиком і виконавчим пристроєм можуть бути елементи (підсилювачі, обчислювачі, перетворювачі тощо), які називаються проміжними (ПЕ). По суті, проміжні елементи реалізують необхідний закон регулювання (про закони регулювання йтиметься далі). У найпростішому випадку ПЕ здійснюють прості математичні операції, такі, як операція порівняння (обчислення різниці GY), операції інтегрування, диференціювання, статичного нелінійного перетворення і т.п. У складніших випадках у складі ПЕ може бути ЕОМ і навіть комплекс ЕОМ.

2. Класифікація систем автоматичного керування

Класифікувати САК можна за різними ознаками. З точки зору спільності класифікації найбільш зручним класифікаційним ознакою можна, мабуть, вважати використання інформації про керований об'єкт. Розрізняють два види такої інформації: апіорна та робоча.

Необхідною апіорною інформацією називається сукупність відомостей про об'єкт та керований процес, необхідна для побудови та функціонування даної САК. Апіорна інформація може бути повною або неповною. Точне знання характеристик керованого процесу та керованого об'єкта назвемо повною інформацією. Необхідність повної початкової інформації притаманна широкому, найстарішому і добре розробленому класу систем – звичайним системам (рис.3).

Якщо апіорна інформація неповна, то отримуємо клас систем під загальною назвою адаптивні системи, що самоприспосовуються. Останні діляться у свою чергу на екстремальні системи, системи з самонастроюванням параметрів або самоналаштовуються, і самоорганізуються системи або системи зі змінною структурою.

Екстремальні системи - це системи, що підтримують в процесі керування екстремум (максимум або мінімум) деякого функціоналу. У таких системах є формувач функціоналу, або сам об'єкт має екстремальну характеристику. Зрозуміло, що в екстремальних системах вихідна інформація є неповною: відомо, що є екстремум, але його координати невідомі.

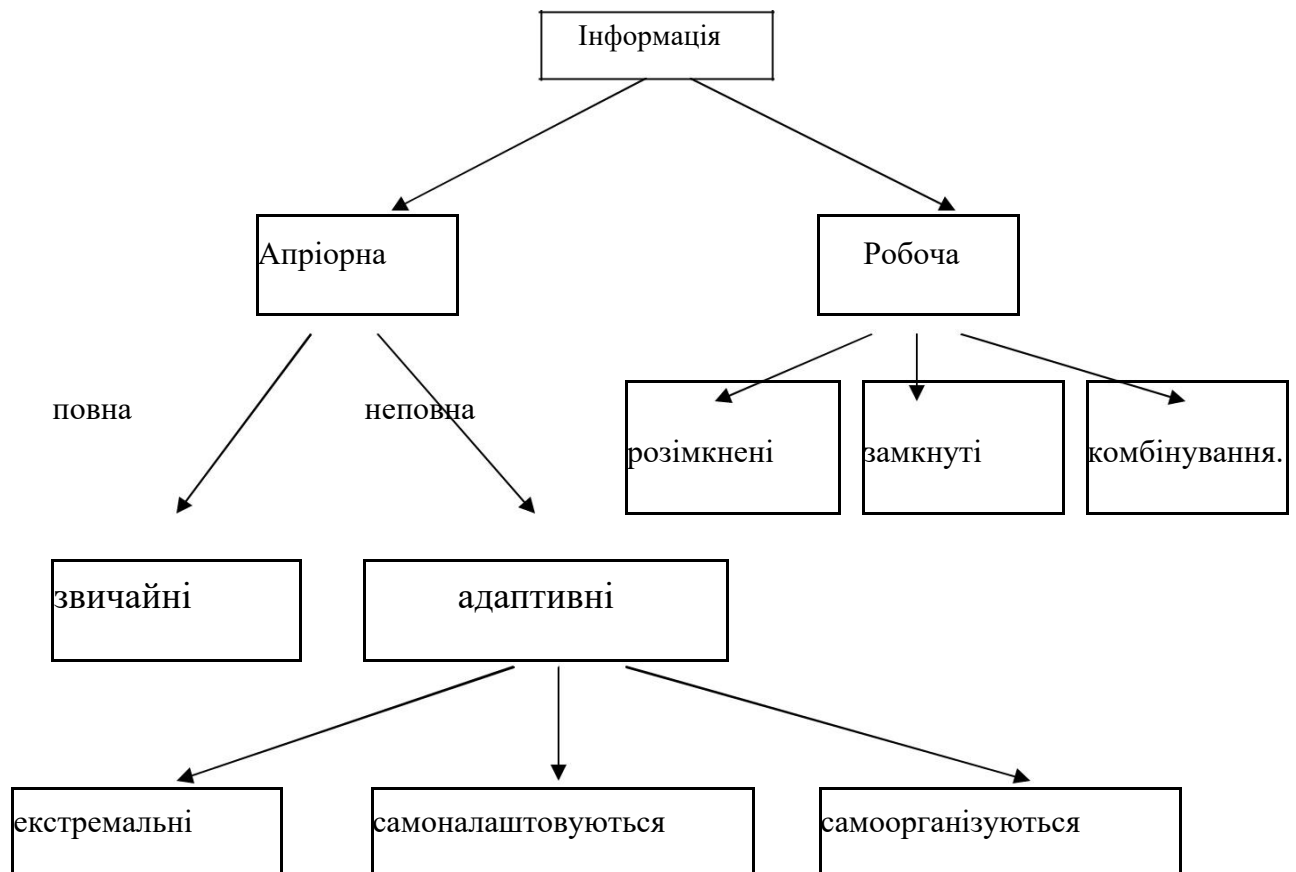


Рис. 3. Класифікація САК щодо використання інформації про об'єкт.

Якщо параметри об'єкта відомі не точно або можуть змінюватися в процесі роботи в деяких межах, для підтримки постійним деякої бажаної якості роботи системи необхідно підлаштовувати параметри УУ. У цьому випадку ми приходимо до систем з самоналаштування параметрів. При цьому в системі має бути аналізатор якості роботи об'єкта за якимсь заданим критерієм. Цей аналізатор визначає відхилення якості роботи системи від необхідної якості і передає відповідний сигнал на пристрій, що наструє (НУ), яке змінює параметри УУ в потрібну сторону, щоб ліквідувати небажане погіршення якості роботи системи. Таким чином, функціональну схему системи, що самоналаштовується, можна зобразити малюнком 4.

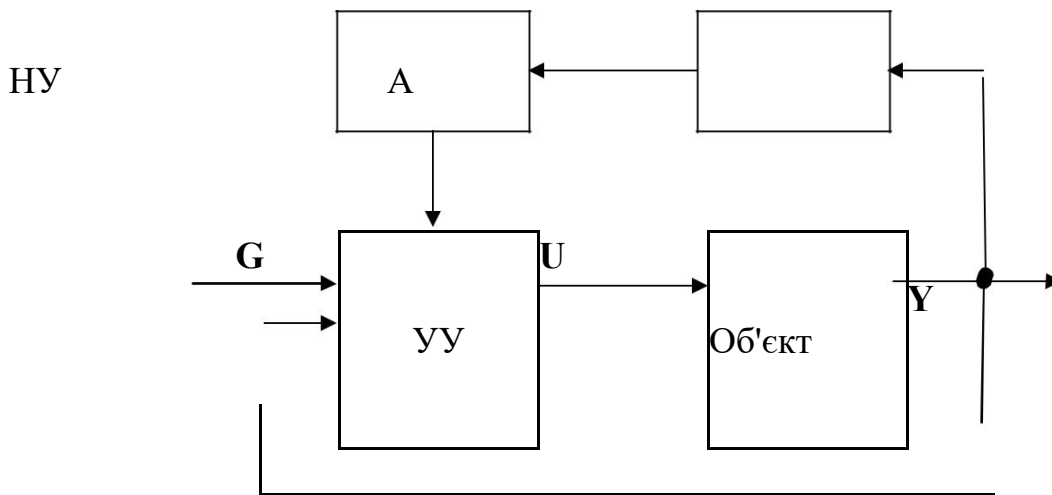


Рис. 4. Система із самонастроюванням параметрів.

Подальшим розвитком цього виду систем є оптимальні системи із самонастроюванням параметрів. У цьому випадку аналізатор замінюється оптимізатором. Якщо завданням звичайної самоналаштовується системи було збереження заданої якості, то завдання оптимізатора - налаштовувати параметри УУ так, щоб отримувати максимальну якість.

Доцільно іноді завдання самоналаштування та деякі нові завдання вирішувати не шляхом зміни параметрів УУ, а шляхом зміни структури УУ. У цьому випадку ми приходимо до систем, що самоорганізуються, тобто до систем з автоматичною зміною структури УУ не заздалегідь заданим чином.

За типом використання робочої інформації або за принципом керування САК поділяються на розімкнуті, замкнуті та комбіновані системи.

В розімкнутій системі застосовується принцип керування за впливом, що задає, тобто робота всіх елементів однонаправлений розімкнутого ланцюга жорстко і однозначно пов'язана з задаючим впливом і керована величина не контролюється. Функціональна схема розімкнутої системи, власне, наведено на рис. 2. Так як вихідна величина в таких системах не контролюється, точність залежатиме від впливів, що обурюють.

Зменшення впливу впливів, що обурюють, на керовану величину і на помилку можливе шляхом автоматичного регулювання з обурення. При цьому впливи, що обурюють, вимірюються і подаються на пристрій керування, який компенсує вплив цих збурень на об'єкт (рис. 5). Регулювання щодо обурення складно реалізувати, якщо є багато обурень і неможливо – якщо є внутрішні перешкоди. Хоча розімкнені системи і є найпростішими, в таких системах можуть виникати великі помилки, тому що вихід, тобто виконання наказу G , ніяк не контролюється. Для контролю необхідно використовувати інформацію про вихід об'єкта в керуючому пристрої, тобто необхідно замкнути систему.

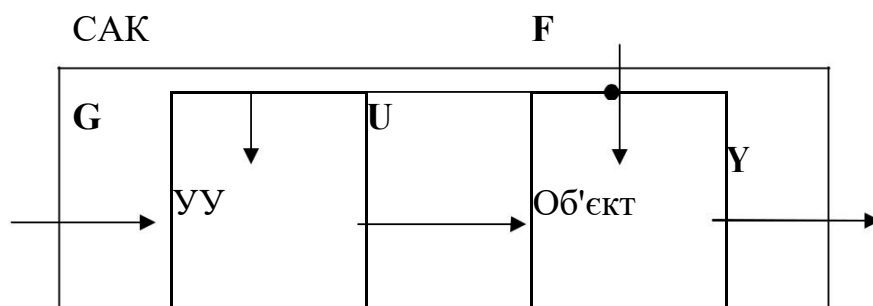


Рис. 5. Система керування по задаючому і по впливу, що збурює.

В замкнутій системі на вхід УУ подаються вплив, що задає

$G(t)$ та регульована величина $Y(t)$. Виходячи з величини $G(t)$ УУ визначає відповідне необхідне значення $Y_{\text{тр}}(t)$ та, маючи інформацію про $Y(t)$, забезпечує необхідну відповідність між $G(t)$ та $Y(t)$ шляхом виробки управляючого сигналу на об'єкт. Таким чином, вводиться зворотний зв'язок і виходить система, що реалізує принцип керування з відхилення $Y_{\text{тр}}(t) - Y(t)$ (Рис.6).

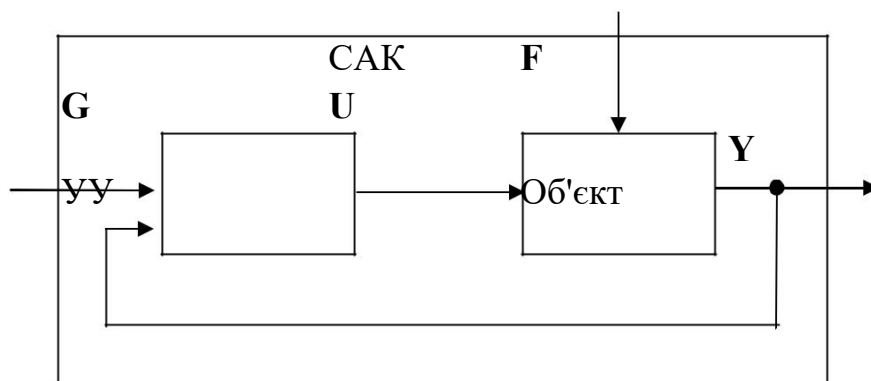


Рис. 6. Система керування з відхиленням.

Комбіновані САК являють собою об'єднання в одну систему замкнутої системи за відхиленням і розімкнутою системою по зовнішньому (що задає або збурює) впливу.

Замкнуті системи можуть у принципі забезпечити необмежену точність і є основним видом САК. Приватним, але дуже важливим видом САК є системи автоматичного регулювання (САР). Завданням САР є підтримка вихідної величини об'єкта $Y(t)$ на заданому рівні $G(t)$, тобто у підтримці рівності $G(t) = Y(t)$.

При цьому в залежності від характеру впливу САР поділяються на системи:

- стабілізації (що впливає постійно і не залежить від часу $G(t) = \text{const}$),
- програмного керування (що впливає $G(t)$ змінюється за заздалегідь заданим законом – програмі),
- стежать (що впливає $G(t)$ заздалегідь не відомо).

Можна класифікувати САК та за іншими ознаками.

За характером рівнянь, що описують САК, останні поділяються на лінійні та нелінійні системи. Лінійна система - це система, процеси в якій описуються лінійними диференціальними рівняннями.

Щоб система була нелінійною, достатньо мати в її складі хоча б одну нелінійну ланку, тобто ланку, що описується нелінійним диференціальним рівнянням.

Для лінійних систем завжди виконується принцип суперпозиції. Він полягає в тому, що реакція системи на будь-яку лінійну комбінацію зовнішніх впливів дорівнює цій лінійній комбінації реакцій на кожне з цих впливів, поданих на систему нарізно. Принцип суперпозиції дозволяє виразити реакцію системи на будь-який довільний вплив через реакцію на елементарний типовий вплив, наприклад, у вигляді одиничної ступінчастої функції. Завдяки принципу суперпозиції розроблено загальну теорію лінійних САК, засновану на загальній теорії розв'язання лінійних диференціальних рівнянь.

К нелінійним системам принцип суперпозиції не застосовується. Тому немає і загальної теорії нелінійних диференціальних рівнянь, на основі якої могла б бути створена загальна теорія нелінійних САК. Існують лише ряд приватних методів для вирішення деяких видів нелінійних рівнянь.

Насправді, зазвичай, всі системи є нелінійними. Але труднощі дослідження нелінійних систем змушує спрощувати їх опис, наприклад, зведенням нелінійних рівнянь до лінійного вигляду в декількох цікавлять нас режимах. Цей процес заміни нелінійних рівнянь лінійними (наближений, звичайно) називається лінеаризацією.

Лінійні САК, у свою чергу, поділяються на звичайні та особливі. Процеси в звичайних системах описуються звичайними диференціальними рівняннями. Особливі лінійні системи – це:

- системи із запізненням, коли в одній або декількох ланках системи є постійне запізнення вихідного сигналу по відношенню до вхідного сигналу,
- системи з розподіленими параметрами, що описуються диференціальними рівняннями в приватних похідних,
- системи зі змінними параметрами або нестационарні системи, коефіцієнти в рівняннях яких змінюються з часом,
- імпульсні системи, в яких є квантування за часом.

За характером зміни сигналів системи діляться на безперервні та дискретні (рис. 7).

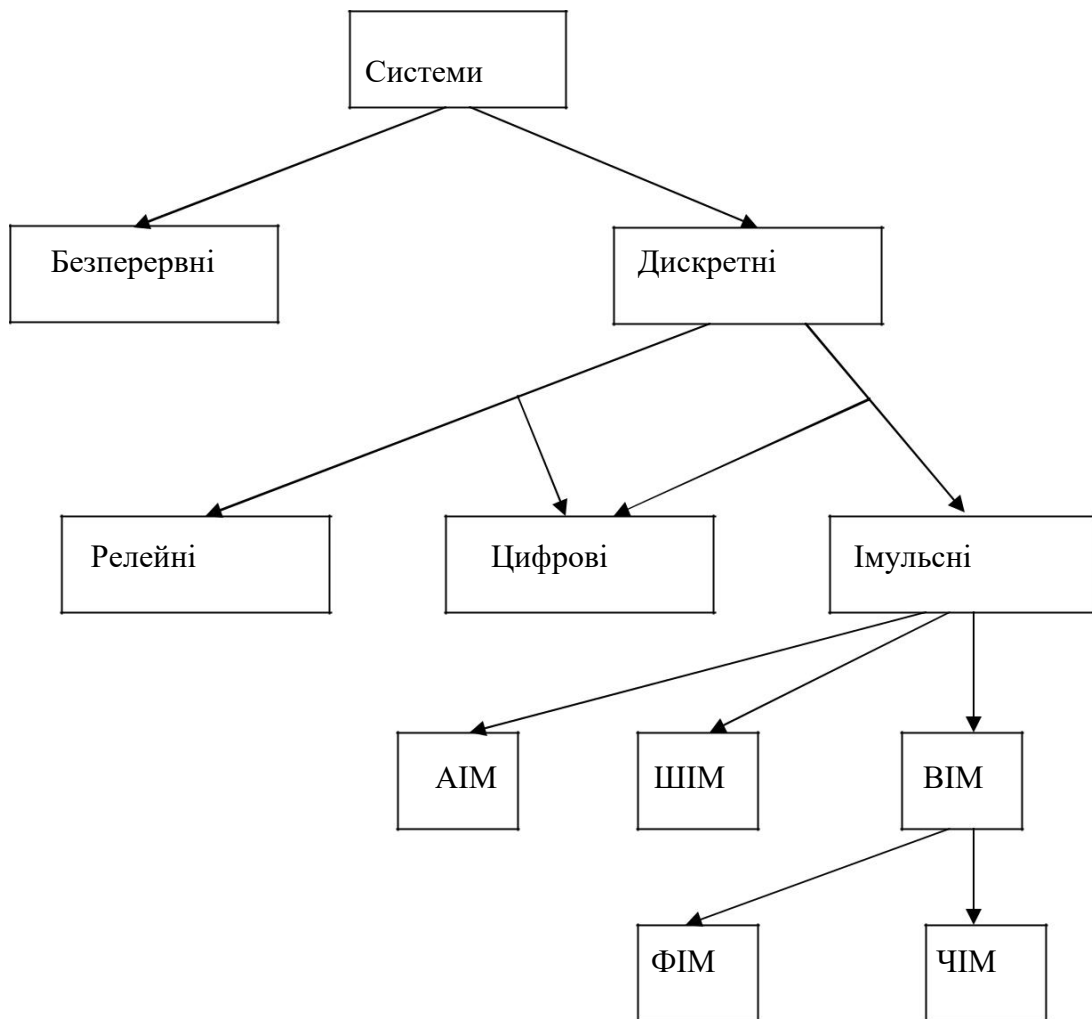


Рис. 7. Класифікація САК за характером сигналів.

САК можуть бути дискретними або тому, що задає або збурює вплив за природою дискретно, або тому, що в ланцюзі керування є хоча б одна ланка, що перетворює безперервні. (Аналогові) сигнали в дискретні. Подібного роду ланка називають ланкою переривчастої дії, а процес перетворення безперервного сигналу в дискретний - квантуванням. Розрізняють квантування за рівнем (за величиною) та за часом.

Пристрої, що здійснюють квантування за рівнем, мають релейні та багатоступінчасті характеристики. Усі устрою, здійснюють квантування за рівнем, є нелінійними ланками, оскільки їхні показники значно нелінійні. Квантування за рівнем завжди нелінійна операція. Застосування реле (і взагалі нелінійних ланок) часто вигідно через простоту системи, що виходить, менших габаритів, а іноді і кращої якості керування.

Пристрої, які здійснюють квантування за часом, називаються імпульсними елементами. Вихідний сигнал імпульсного елемента є серією імпульсів. Зазвичай один із параметрів імпульсу – амплітуда, тривалість, період прямування – змінюється відповідно до значень вхідної безперервної величини в дискретні моменти часу. Цей процес зміни одного з параметрів імпульсу у функції або

залежності від вхідної величини називається модуляцією. Квантування ж за часом разом із модуляцією називається імпульсною модуляцією. Отже, імпульсний елемент здійснює імпульсну модуляцію вхідного безперервного сигналу. Відповідно до того, який параметр імпульсу змінюється, розрізняють амплітудно-імпульсну модуляцію (АІМ), коли змінюється амплітуда імпульсу; широтно-імпульсну модуляцію (ШІМ), коли змінюється тривалість імпульсу, і час імпульсну модуляцію (ВІМ). Остання, своєю чергою, ділиться на фазоімпульсну модуляцію (ФІМ), коли змінюється тимчасове положення імпульсу щодо деякого опорного сигналу, і частотно-імпульсну модуляцію (ЧІМ), коли він змінюється частота слідування імпульсів. Так як в імпульсному елементі зберігається лінійна залежність між безперервним вхідним сигналом і відповідним параметром імпульсів, то імпульсна модуляція є лінійною операцією, а імпульсний елемент – лінійним елементом. Імпульсна система є лінійною, якщо інші ланки у системі – лінійні.

Нарешті, одночасне квантування за рівнем і за часом присутнє в цифрових системах, тобто в системах, в контурі керування яких є елементи цифрової техніки, або ЦВМ або навіть комплекси ЦВМ. Квантування за рівнем пов'язане з тим, що сигнали, що безперервно змінюються, подаються в цифровій, тобто дискретній формі. Квантування за часом обумовлено тим, що сигнал на виході ЦВМ видається в дискретні моменти часу, в проміжку між якими ЦВМ проводить обчислення.

В залежності від кількості вихідних координат об'єкта керування, що утворюють вектор вихідної величини Y , САК поділяються на одновимірні (вихідна величина – скаляр) та багатовимірні (вихідна величина – вектор). Багатомірні САК діляться, у свою чергу, на системи пов'язаного та незв'язаного керування. Системи незв'язаного керування мають кілька керуючих пристроїв, кожне з яких здійснює керування своєю вихідною величиною. При цьому всі ці пристрої не мають взаємних зв'язків, внаслідок чого зміна однієї вихідної величини не впливає на інші вихідні величини. Якщо такі зв'язки є, то система є системою пов'язаного керування.

Перераховуючи різні класифікаційні ознаки, слід зазначити, що в багатьох САК, крім перетворень сигналів, що описуються рівняннями, існують перетворення, що відповідають логічним функціям «І», «АБО», «НІ», «ЯКЩО, ТО...» та ін.

3. Загальна характеристика процесів у системі автоматичного керування

Як і у будь-якої динамічної системи, процеси в САК поділяються на встановлені та невстановлені (рис. 8).

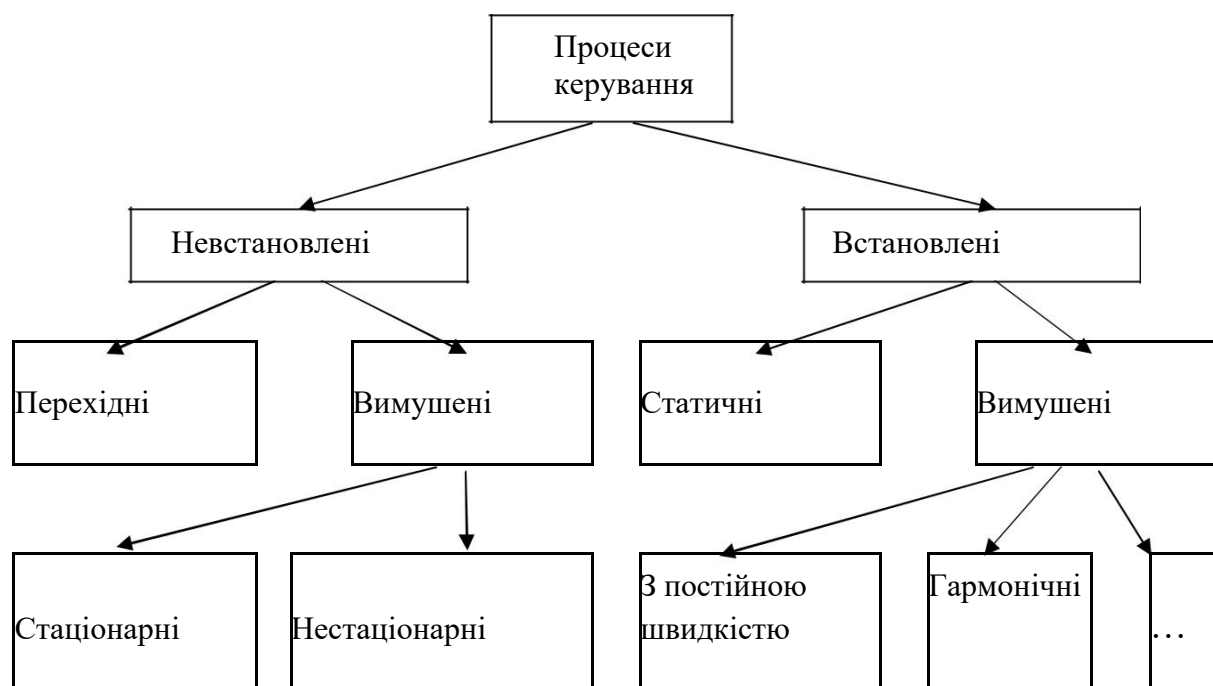


Рис. 8. Процеси керування.

Взагалі кажучи, будь-який процес на виході САК можна представити як суму перехідного та встановленого процесів.

Можна визначити перехідний процес як власний (вільний) рух системи або рух виведеної зі стану рівноваги системи знову до рівноважного стану після зняття сили, що змушує. Характеризувати власний рух можна, наприклад, зміною вихідної (керованої) величини, що триває, після припинення зміни всіх вхідних впливів. Пояснимо це на найпростішому прикладі.

Нехай до часу $t = t_1$ керована величина дорівнювала $y(t) = y_{01}$, що відповідає певному впливу, що задає $g(t) = g_1$ при рівних нулю впливах, що збурюють

(рис. 9). У момент часу $t = t_1$ вплив стрибком змінюється до величини $g(t) = g_2$ (Рис. 9,а). Тоді керована величина повинна змінитись до відповідного рівня $y(t) = y_{02}$. Однак це нове значення встановиться не одразу, а після перехідного процесу. Перехідний процес може протікати з коливаннями (коливальний перехідний процес) (рис. 9,б), а може бути непохитним або, як кажуть, апериодичним (рис. 9,в). Перехідний процес повністю характеризує динамічні властивості САК.

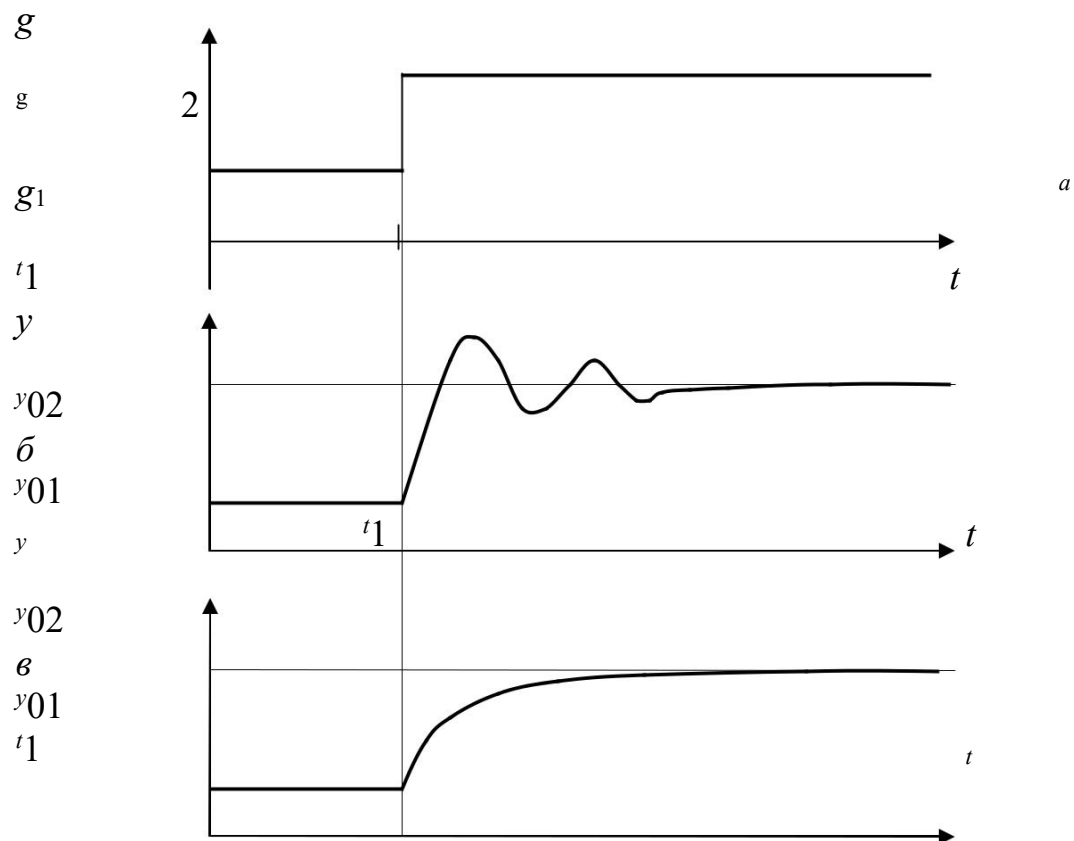


Рис. 9. Перехідні процеси.

Якщо на вхід САК надходить регулярний сигнал, наприклад, є тільки задає вплив, що змінюється за заданим законом, то процес, що встановився, - це процес на виході за вирахуванням перехідної складової. Оскільки перехідний процес у стійких системах згодом згасає, то, зрештою, на виході САК буде спостерігатися тільки встановився процес.

Якщо вплив постійно ($g(t) = g_0 = \text{const}$), то процес, що встановився, є статичним. У статичному процесі проявляються статичні властивості САКК. Статичні властивості характеризують рівноважний стан системи при різних за величиною, але постійних у часі вхідних впливах. Статичні властивості повністю визначаються статичними характеристиками. Статичною характеристикою називається залежність вихідний величини від однієї з вхідних величин в статичному процесі, що встановився, при всіх інших вхідних величинах рівних нулю або постійних.

Якщо вплив, що задає, змінюється за гармонічним законом, з постійною швидкістю, з постійним прискоренням і т.п. (Такі впливи називаються типовими), то на виході САК з часом також буде спостерігатися вимушений процес, що змінюється відповідно до гармонійного закону, з постійною швидкістю, з постійним прискоренням і т.п. Отже, вимушений процес, що встановився, є невласний рух системи під дією регулярних вхідних впливів. Слід зазначити, що

хоча перехідний процес і відсутній у вимушеному процесі, що встановився, останній все ж частково характеризує динамічні властивості САК. Це виражається, наприклад, у зрушенні по фазі і зміні амплітуди коливань у вимушеному гармонійному режимі, що встановився.

Але в САК можуть спостерігатися випадки, коли з вихідного сигналу не можна виділити процес, що встановився. Це буде тоді, коли вхідний вплив змінюється випадковим чином, тобто є випадковим процесом. При цьому отримуємо неусталений вимушений процес. Залежно від того, є випадковий процес стаціонарним або нестаціонарним, отримуємо і відповідні вимушені процеси, що не встановилися.

При розгляді процесів у САК велике значення мають стійкість та якість процесів керування.

Стійкість - це властивість системи повертатися в стан, що встановився після того, як вона була виведена з цього стану яким-небудь обуренням. Замкнуті САК, як всякі замкнуті системи, дуже схильні до втрати стійкості, що найчастіше проявляється у виникненні розбіжних коливань.

Якість процесів керування характеризується тим, наскільки процес керування є близьким до бажаного. Кількісно воно визначається критеріями якості, які вибираються відповідно до мети керування. Як правило, в якість процесів керування включають якість перехідних процесів і точність керування, яка характеризується похибкою системи в типових встановилися режимах.

4. Математичний опис лінійних систем автоматичного керування

Метою розгляду систем автоматичного керування може бути вирішення одного із двох завдань.

- Завдання аналізу та завдання синтезу. У першому випадку дається система, включаючи значення її параметрів, і потрібно визначити властивості системи. - У другому випадку навпаки, задані властивості САК, тобто вимоги, яким повинна задовольняти система, і необхідно спроектувати систему, що володіє цими властивостями.

В у загальному вигляді порядок дослідження САК в обох випадках включає:

- математичний опис системи,
- вивчення її встановилися режимів,
- вивчення перехідних процесів.

Методика формалізованого опису елементів і систем.

При формалізованому описі елементів і систем виконуються такі положення:

- система розглядається як ланцюг взаємодіючих (фізично та інформаційно) елементів, які характеризуються можливістю передавати фізичні діяння та інформаційні сигнали в одному, чітко визначеному, напрямі;
- кожен конструктивний елемент системи розглядається як перетворювач вхідного діяння у вихідну реакцію;
- на основі апріорних даних щодо фізичної природи кожного елемента та закономірностей його функціонування складається математична модель, яка

відображає найбільш суттєві для даного випадку взаємозв'язки між вхідними та вихідними змінними елемента;

- при складанні математичної моделі елементів чи системи в цілому завжди виникає необхідність деякої ідеалізації реальних фізичних процесів, певних спрощень фізичних закономірностей, відкидання другорядних факторів. Для цього потрібні глибокі знання процесу (об'єкта), фундаментальних законів, та експериментальна перевірка.

При дослідженні елементів та систем аналізують проходження вхідних сигналів, або, по-іншому визначають реакцію елемента чи системи на вхідний сигнал. Для можливості порівняння властивостей систем в ТАК введено поняття “типові сигнали”, і саме вони використовуються для цієї мети. При цьому властивості елементів та систем оцінюються в часовій та частотній областях, що дає можливість оцінити їх поведінку в статичі та динаміці, тобто визначити їх статичні та динамічні характеристики.

В залежності від характеру зміни сигналів за часом та формою математичного представлення розрізняють:

- регулярні (детерміновані) сигнали, які змінюються за певним законом та описуються конкретною функцією часу;
- нерегулярні (випадкові) сигнали, які змінюються з часом випадково, значення в кожний момент часу – ймовірне.

Типові сигнали – стандартні, які використовуються при теоретичних та експериментальних дослідженнях та описуються простими математичними залежностями і легко відтворюються. Використання типових (“еталонних”) діянь дозволяє уніфікувати розрахунки різних систем та порівнювати їх передаточні властивості.

Основними видами типових регулярних сигналів є:

- ступінчастий (рис. 10 а). Для цього сигналу характерним є те, що він змінюється стрибкоподібно в момент часу t_0 і зберігає своє значення на протязі експерименту.

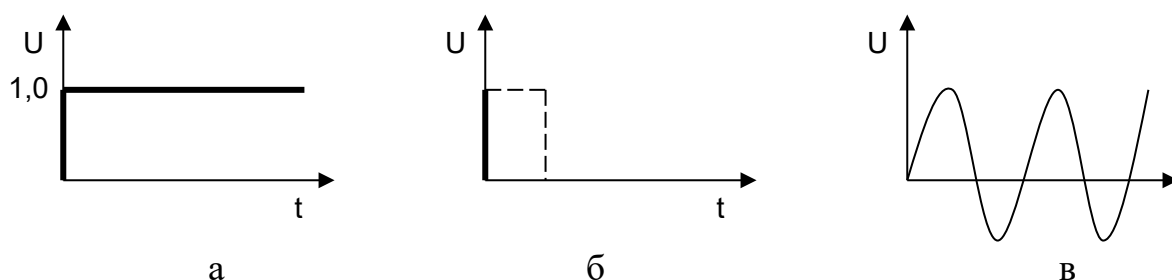


Рис.10. Типові сигнали, а – ступінчастий, б – імпульсний, в – гармонійний

. Приймається, що величина стрибка має умовну одиницю, тоді

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Цей сигнал формується при комп'ютерному моделюванні, а для реальних систем його величина, наприклад переміщення регулюючого органа, має кінцеве

значення, і швидкість зміни (стрибок) обмежена. Одиничний ступінчастий сигнал, який подається в момент $t=t_1$, позначається $1(t - t_1)$. Стрибкоподібний сигнал використовується для визначення часових характеристик та може імітувати змінювання збурення або сигналу завдання. Необхідно враховувати, що в реальних системах цей сигнал необхідно підтримувати на протязі всього експерименту, що часто приводить до неприпустимих порушень технологічного режиму;

- імпульсний (рис.10, б) – одиничний імпульс, який має нескінченно велику висоту і нескінченно малу тривалість, а його площа дорівнює одиниці. Звичайно, це певна ідеалізація, яка в математиці відома як δ -функція:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t > 0, \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Важливою є залежність

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt} \quad (3)$$

тобто δ -функція – це похідна від одиничного стрибка. Неодиначний імпульс з площею a_0 позначається як $a_0(t)$.

Якщо одиничний імпульс діє в момент часу $t=t_1$, то йому відповідає зміщена дельта-функція $\delta(t-t_1)$. Основна властивість дельта-функції:

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(\vartheta) \cdot \delta(\vartheta - t) d\vartheta = U(t) \quad (4)$$

тобто неодиначна імпульсна функція $U(\vartheta)\delta(\vartheta - t)$, отримана як добуток довільної функції $U(\vartheta)$ на зміщену дельта-функцію, існує лише в момент $\vartheta = t$. Це фільтруюча або “вихоплююча” властивість дельта-функції. Цей вираз можна також розглядати як розкладення деякої функції $U(t)$ на суму нескінченно великого числа елементарних імпульсів виду $U(\vartheta)\delta(\vartheta - t)$, причому кожен елементарний імпульс діє лише в момент $\vartheta = t$ та має площу $U(\vartheta)d\vartheta$. В реальних системах імпульс має певну тривалість (на рис. 2.1,б показано пунктиром) та величину;

- гармонійний, який відповідає синусоїдальному закону:

$$U(t) = U_m \sin \omega t \quad (5)$$

де: U_m - максимальне значення амплітуди, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ - кругова частота, яка може змінюватись від 0 до ∞ , T – період;

- лінійний, який змінюється за виразом:

$$U(t) = 1(t) \cdot a_1 t \quad (6)$$

де: a_1 - коефіцієнт, який характеризує швидкість наростання сигналу $U(t)$.

Динамічні характеристики елементів і систем.

Динамічний - основним режимом регулювання систем автоматичного керування. Для отримання динамічних характеристик в теорії автоматичного керування використовуються: диференціальні рівняння, передаточні функції, частотні характеристики, часові характеристики.

В загальному випадку динамічні властивості одноконтурної автоматичної системи керування описуються диференціальним рівнянням виду:

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_m \frac{d^m U}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} U}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dU}{dt} + b_0 U =$$
$$c_l \frac{d^l z}{dt^l} + c_{l-1} \frac{d^{l-1} z}{dt^{l-1}} + \dots + c_1 \frac{dz}{dt} + c_0 z \quad (7)$$

де: X, U, z – координати стану (регульована координата) та вхідні змінні – керуюча дія та збурення, a_i, b_i, c_i – коефіцієнти. В рівнянні (7) необхідно врахувати фактор часу, тобто фактично всі змінні залежать від часу – $x(t), U(t), z(t)$. Коефіцієнти диференціального рівняння називають параметрами, значення яких визначаються особливостями об'єкта: конструктивними і режимними. Зручною формою запису рівняння (7) є операторна.

Передаточні функції. В теорії автоматичного керування зручною і найбільш наочною формою визначення закономірностей перетворення вхідних сигналів є передаточна функція. В операторному вигляді – це відношення оператора дії до власного оператора, причому кількість передаточних функцій дорівнює кількості вхідних сигналів:

$$W_1(p) = \frac{R_1(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (8)$$

$$W_2(p) = \frac{R_2(p)}{D(p)} = \frac{c_l p^l + c_{l-1} p^{l-1} + \dots + c_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (9)$$

$$\text{тобто} \quad W_1(p) = \frac{x(p)}{U(p)}, W_2(p) = \frac{z(p)}{z(p)} \quad (10)$$

Передаточні функції мають нулі (корені рівняння $R(p)=0$) і полюси (корені рівняння $D(p)=0$). На основі виразів (8)-(10) визначається фундаментальна залежність:

$$x(p) = W_1(p) \cdot U(p) + W_2(p) \cdot z(p), \quad (11)$$

Таким чином, передаточні функції мають чіткий фізичний зміст: показують як перетворюється вхідний сигнал (передається з входу на вихід). Передаточні функції зручно отримувати з диференціальних рівнянь в операторному вигляді,

Передаточні функції можуть бути також в формі зображень Лапласа: це відношення зображення вихідної величини до зображення вхідної за нульових початкових умов.

Частотні характеристики. При розв'язанні задач аналізу та синтезу необхідно оцінювати також властивості елементів та систем в частотній області, при різних частотах вхідних сигналів. Частотні характеристики – це реакція елемента чи системи на гармонійний сигнал (2.9) при змінюванні частоти від 0 до ∞ . Вихідний сигнал відрізняється від вхідного амплітудою та фазою:

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (12)$$

Динамічні властивості досліджуваних елементів чи систем визначаються амплітудно-частотною $A(\omega)$, фазо-частотною $\varphi(\omega)$ та амплітудно-фазовою характеристиками (рис.11)

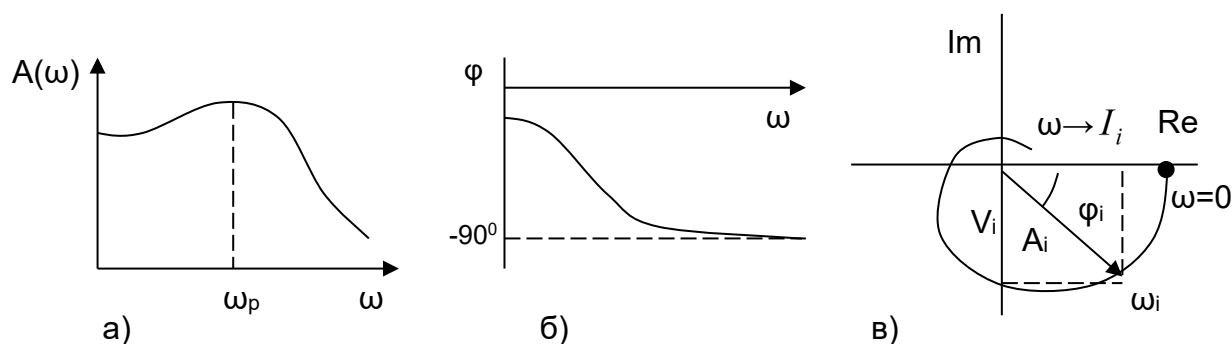


Рис.11 Частотні характеристики, а - амплітудно-частотна (АЧХ); б - фазо-частотна (ФЧХ); в - амплітудно-фазова (АФХ)

При збільшенні ω амплітудно-фазова характеристика $A(\omega) \rightarrow 0$, тобто проявляються інерційні властивості елемента та системи. Чим менша інерційність, тим ширша $A(\omega)$, тобто більша смуга (діапазон) пропускаємих частот. Часто існує резонансна частота, коли $A(\omega_p)$ має максимальне значення.

Фазо-частотна характеристика $\varphi(\omega)$ від'ємна, тобто вихідні коливання відстають від вхідних за фазою.

На комплексній площі $A(\omega)$ та $\varphi(\omega)$ об'єднуються в одну - амплітудно-фазову характеристику (АФХ) – рис.2.2,в. Це крива (годограф), яку описує кінець вектора A при зміні частоти від 0 до ∞ . Проеції вектора на дійсну (Re) та уявну (Im) осі – дійсна $U(\omega)$ та уявна $V(\omega)$ частотні характеристики.

Важливою особливістю лінійних систем є те, що частота вхідних та усталених вихідних (після зникнення перехідної складової) сигналів співпадають. Крім того, якщо розглядати відношення амплітуд вихідного та вхідного сигналів, то при $\omega=0$ – це коефіцієнт передачі ($A(0)=K$).

Частотну характеристику можна отримати підстановкою $p=j\omega$ в вираз для передаточної функції, наприклад (13), тоді

$$W(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (13)$$

Цей вираз називають частотною передаточною функцією, яку можна подати у вигляді:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}, \quad (14)$$

$$\text{де: } A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \phi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}, \quad (15)$$

$$U(\omega) = A(\omega) \cos \phi(\omega), V(\omega) = A(\omega) \sin \phi(\omega) \quad (16)$$

В загальному випадку виконують такі перетворення: записують вираз:

$$W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{U_R(\omega) + jV_R(\omega)}{U_D(\omega) + jV_D(\omega)}, \quad (17)$$

після чого звільняються від уявності в знаменнику:

$$W(j\omega) = \frac{(U_R(\omega) + jV_R(\omega))(U_D(\omega) - jV_D(\omega))}{U_D^2(\omega) + V_D^2(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega), \quad (18)$$

$$\text{де: } U(\omega) = \frac{U_R(\omega)U_D(\omega) + V_R(\omega)V_D(\omega)}{U_D^2(\omega) + V_D^2(\omega)}, \quad (19)$$

$$V(\omega) = \frac{V_R(\omega)U_D(\omega) - U_R(\omega)V_D(\omega)}{U_D^2(\omega) + V_D^2(\omega)}, \quad (20)$$

В практичних розрахунках користуються також логарифмічними частотними характеристиками, побудованими в логарифмічних координатах, тому їх можна замінити ломаними лініями, складеними з кількох прямолінійних відрізків. Крім того, в логарифмічних координатах легко знаходити характеристики різних з'єднань елементів: операціям множення і ділення відповідають додавання та віднімання ординат логарифмічних характеристик, наприклад:

$$A = \prod_{i=1}^n A_i; \lg A = \sum_{i=1}^n \lg A_i, \quad (21)$$

Амплітудно-фазові характеристики будуються в координатах $20 \lg A = f(\lg \omega)$, фазочастотні - $\phi = f(\lg \omega)$. Одиницею довжини по осі частот є декада – інтервал частот між ω_i та $10\omega_i$. Ординати логарифмічної амплітудно-частотної характеристики $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ вимірюють в логарифмічних одиницях – белах (Б) або децибелах (дБ), що відповідає відношенню потужностей двох сигналів: якщо потужність одного сигналу більша (або менша) іншого в 10 разів, тоді потужності відрізняються на 1Б ($\lg 10=1$). Потужність гармонійного сигналу пропорційна квадрату його амплітуди, тому при вимірюванні відношення амплітуд перед логарифмом необхідно враховувати множник 2. Наприклад, на деякій частоті $A(\omega)=100$, що означає різницю вхідного і вихідного сигналів в 100^2 разів, тобто $2 \cdot \lg 100=4Б$ (40 дБ), а $L(\omega)=20 \cdot \lg A(\omega)=40$ дБ.

За видом частотних характеристик всі елементи і системи поділяються на дві групи: мінімально-фазові і немінімально-фазові. Мінімально-фазовими

називають такі елементи і системи, для яких всі нулі та полюси передаточної функції $W(p)$ мають від'ємні дійсні частини та фазовий зсув $\varphi(\omega)$ є мінімальним в порівнянні з іншими елементами, які мають таку ж амплітудно-частотну характеристику $A(\omega)$, але хоча б один полюс чи нуль у них має додатню частину. Для мінімально-фазових елементів і систем достатньо знати $A(\omega)$, $U(\omega)$ і $V(\omega)$ для повної оцінки їх характеристик.

Часові характеристики. Це реакція елемента чи системи на типові входні сигнали – стрибкоподібний чи імпульсний (рис.2.3).

Часові функції є наочними, за їх видом можна оцінити загальні властивості елемента чи системи, які визначають їх динамічні особливості. З математичної точки зору часові характеристики є розв'язком диференціального рівняння, яке описує поведінку елемента чи системи в залежності від виду зовнішнього сигналу (це визначається правою частиною диференціального рівняння) та початкових умов, як правило нульових. Перехідна функція $h(t)$ (рис.12,а) – зміна вихідної величини з часом при подачі на вхід одиничного ступінчатого сигналу за нульових початкових умов.

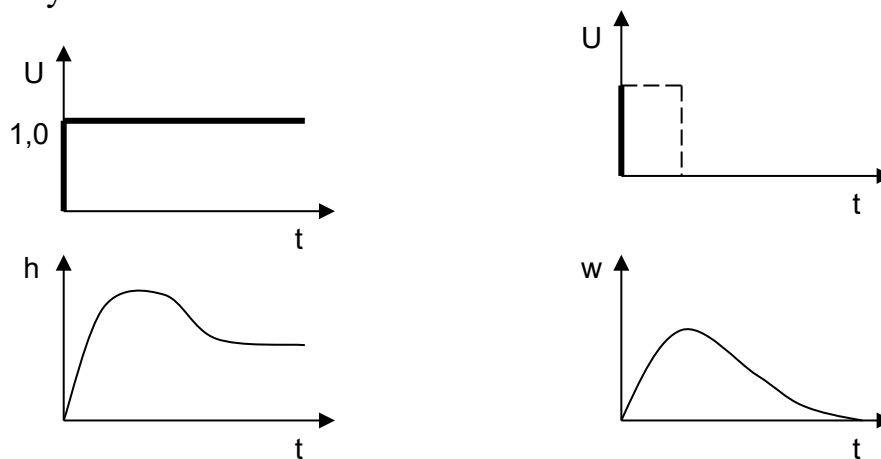


Рис.12. Часові характеристики: а) – перехідна функція $h(t)$

б) – імпульсна перехідна функція $w(t)$

Імпульсна перехідна функція $w(t)$ (рис.12, б) – зміна вихідної величини з часом після подачі на вхід сигнала у вигляді δ -функції. Цю характеристику називають також ваговою функцією, або функцією ваги.

В задачах аналізу та синтезу використовуються різні динамічні характеристики, тому важливо знати і зв'язок між ними, який є однозначним тому, що фактично – це відображення одних і тих же властивостей елемента чи системи в різній формі. В той же час це дає можливість використовувати в конкретній задачі саме такі характеристики, які є найбільш зручними. Вище вже вказувалось, що перехідна функція $h(t)$ – розв'язок диференціального рівняння. Враховуючи, що δ -функція і одиничний стрибок зв'язані між собою залежністю

$$\delta(t) = 1'(t), \quad (22)$$

справедливі також залежності:

$$w(t) = h'(t), h(t) = \int_0^t w(t)dt, \quad (23)$$

зображення за Лапласом одиничного стрибка

$$L[1(t)] = \frac{1}{s}, \quad (24)$$

$$\text{тому} \quad L[h(t)] = \frac{W(s)}{s}, \quad (25)$$

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{W(s)}{s} \right], \quad (26)$$

де: L^{-1} - символ зворотнього перетворення Лапласа.

Приймаючи до уваги, що

$$L[\delta(1)] = 1, \quad (2.27)$$

можна записати:

$$L[w(t)] = W(s), W(t) = L^{-1}[W(s)], \quad (28)$$

Реакція елемента чи системи на довільний вхідний сигнал визначається за допомогою інтеграла згортки (інтеграл Дюамеля):

$$x(t) = h(t)U(0) + \int_0^t h(t - \tau)U'(\tau)d\tau, \quad (29)$$

$$x(t) = h(0)U(t) + \int w(t - \tau)U(\tau)d\tau. \quad (30)$$

5. Типові елементарні ланки та їх характеристики

Математичний опис починається з розбиття системи на ланки та описи цих ланок. Останнє може здійснюватися або аналітично (рівняннями), або графічно (характеристиками). По рівнянням чи характеристикам ланок складаються рівняння чи характеристики системи загалом, виходячи з чого й досліджується система. Розбиття системи на ланки відрізняється від розбиття на блоки у функціональній схемі. Там розбиття здійснювалося виходячи з виконуваних функцій, тобто призначення блоків, а при математичному описі розбиття здійснюється виходячи зі зручності отримання цього опису. Для зручності опису систему слід розбивати на можливо більш прості (дрібні) ланки. Але разом з тим необхідно, щоб ці ланки мали спрямованість дії. Ланкою спрямованої дії називається ланка, що передає вплив тільки в одному напрямку - з входу на вихід, так, що зміна його стану не впливає на стан попередніх ланок. При такому розбитті математичний опис ланки спрямованої дії складається без урахування зв'язку з іншими ланками. Відповідний математичний опис всієї системи в цілому може бути отримано як сукупність незалежно складених рівнянь ланок доповнене рівняннями зв'язку між ланками. Внаслідок такого розбиття складається структурна схема САК. Структурна схема складається з прямокутників, що

зображують ланки, та зв'язків зі стрілками, що з'єднують входи та виходи ланок. Стрілки показують також зовнішні впливи, прикладені до окремих ланок. Кожній ланці надається описує її рівняння або характеристика. Таким чином, функціональна схема дозволяє зрозуміти, як працює система, а структурна схема - як її роботу зручніше описати. Отримання структурної схеми є кінцевою метою математичного опису системи. Основна складність, яка існує при виведенні рівнянь ланок, полягає у необхідності встановлення допустимого ступеня ідеалізації та спрощення ланок. Головним спрощенням, якого слід прагнути, є їх лінеаризація, тобто опис ланок лінійними диференціальними рівняннями.

В автоматичних системах використовуються різні функціональні елементи (автоматичні регулятори, датчики, перетворювачі і інш.), які мають різну природу і конструкцію, але їх поведінка описується однаковими математичними залежностями, що дає можливість виділити порівняно невелику кількість типових ланок. Кожній такій ланці відповідає математична модель як залежність між вхідною та вихідною величинами, при цьому ця залежність є достатньо простою, і ланки називають елементарними. Елементарна ланка (ЕЛ) – це виділена ділянка (частка, елемент), яка має однонаправлену дію з відомою залежністю $x = f(U)$ (рис.13).

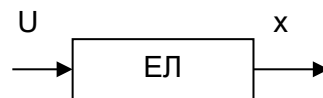


Рис.13. Елементарна ланка

В теорії автоматичного керування використовуються такі елементарні ланки (ЕЛ): аперіодична, підсилювальна, коливальна, інтегральна, диференціююча, із запізнюванням. Всі ці ЕЛ є мінімально-фазовими елементами. При аналізі властивостей елементарних ланок необхідно знати: рівняння, передаточну функцію, часові та частотні характеристики, а також реальні об'єкти, властивості яких описуються конкретною елементарною ланкою.

Підсилювальна ланка. Рівняння ланки має вигляд:

$$x = kU, \quad (31)$$

де: k - коефіцієнт передачі.

Рівняння ланки в операторному вигляді:

$$x(p) = kU(p), \quad (32)$$

звідки передаточна функція

$$W(p) = \frac{x(p)}{U(p)} = k, \quad (33)$$

Частотні характеристики отримують підстановкою: $p = j\omega$, звідки амплітудно-фазова характеристика:

$$W(j\omega) = k, \quad (34)$$

дійсна частина $U(\omega)=k$, уявна $V(\omega)=0$, амплітудно-фазова характеристика $\varphi(\omega)=0$ (рис.14)

Перехідна функція підсилювальної ланки

$$h(t) = k \cdot 1(t), \quad (35)$$

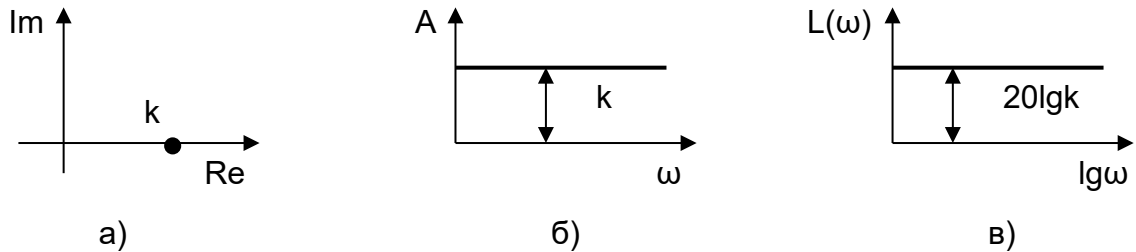


Рис.14. Частотні характеристики підсилювальної ланки, а – амплітудно-фазова (АФХ), б – амплітудно-частотна (АЧХ),

в – логарифмічна амплітудно-частотна (ЛАЧХ)

а імпульсна характеристика

$$w(t) = k \cdot \delta(t), \quad (36)$$

Таким чином, підсилювальна ланка є безінерційною, і сигналу будь-якої частоти ($\omega=0; \infty$) проходять з однаковим відношенням амплітуд вхідної і вихідної змінної, яке дорівнює k

Аперіодична ланка. Диференціальне рівняння ланки:

$$T \frac{dx}{dt} + x = kU, \quad (37)$$

де: T - постійна часу, k - коефіцієнт передачі.

В операторному вигляді рівняння (37) записується так:

$$(Tp + 1)x(p) = kU(p), \quad (38)$$

звідки передаточна функція ЕЛ:

$$W(p) = \frac{k}{Tp+1}, \quad (39)$$

Амплітудно-фазова характеристика відповідає виразу (39) при $p = j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{k}{T(j\omega)+1}, \quad (40)$$

Домножуючи вираз (2.40) на $(T(j\omega) - 1)$, отримуємо:

$$W(j\omega) = \frac{k-jTk\omega}{(T\omega)^2+1} = U(\omega) + jV(\omega), \quad (41)$$

$$\text{де:} \quad U(\omega) = \frac{k}{1+(T\omega)^2}, V(\omega) = -\frac{kT\omega}{1+(T\omega)^2}, \quad (42)$$

Амплітудно-частотна характеристика:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}, \quad (43)$$

Фазочастотна характеристика

$$\phi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = -\arctg T\omega, \quad (44)$$

Ці характеристики показані на рис.15

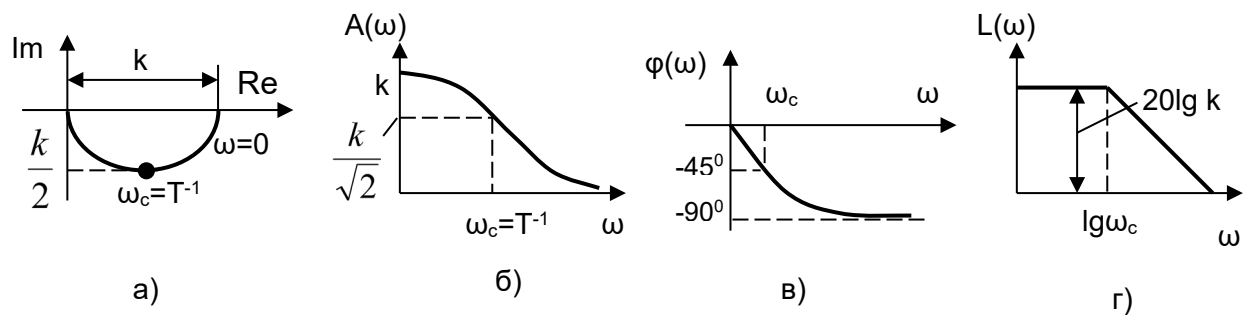


Рис.15. Частотні характеристики аперіодичної ланки, а – АФХ, б – АЧХ, в – ФЧХ, г – ЛАЧХ

Перехідна функція аперіодичної ланки знаходиться як сума загального та частинного роз'язків рівняння (44):

$$h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \cdot 1(t), \quad (45)$$

Імпульсна характеристика ланки визначається диференціюванням $h(t)$:

$$w(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t), \quad (46)$$

Часові характеристики аперіодичної ланки показані на рис16.

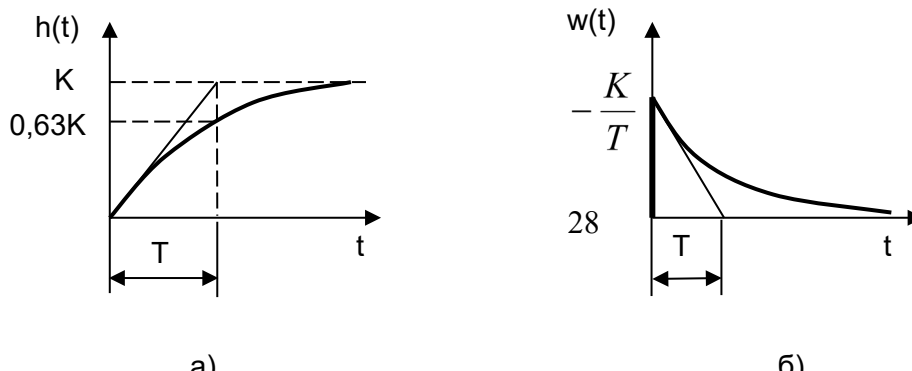


Рис.16. Часові характеристики аперіодичної ланки,
а – перехідна функція, б – імпульсна характеристика

З аналізу частотних характеристик ланки випливає, що гармонійний сигнал малої частоти ($\omega < \omega_c$) пропускається добре, про що свідчить відношення амплітуд вихідного і вхідного сигналів. При збільшенні частоти ($\omega > \omega_c$) зменшується коефіцієнт передачі і при $\omega \rightarrow \infty$ $K \rightarrow 0$. Аперіодична ланка є мінімально-фазовою, тому що створює менший фазовий зсув ніж інші ланки з такою характеристикою. Наприклад, нестійка ланка, частотна характеристика якої

$$W(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega - 1}, \quad (47)$$

створює зсув за фазою

$$\phi(\omega) = -180^\circ + \arctg \omega T, \quad (48)$$

Часові характеристики аперіодичної ланки (рис.16) дають можливість оцінити постійну часу T , яка визначає інерційність ланки.

Аперіодичною ланкою можна описувати різні елементи, які можуть накопичувати та передавати енергію чи речовину: конструктивні, електричні, гідравлічні збірники та інш.

В задачах аналізу та синтезу амплітудно-фазова характеристика аперіодичної ланки визначаються формулою:

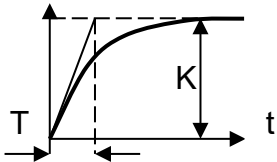
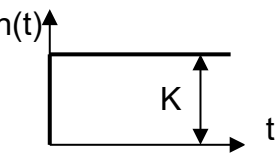
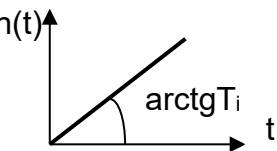
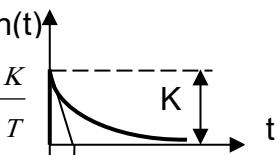
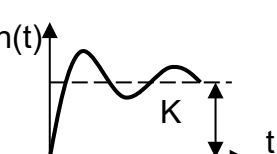
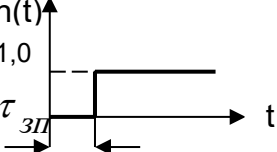
$$W(j\omega) = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} e^{-\arctg T\omega}, \quad (49)$$

Властивості інших ланок вивчаються самостійно за наведеною схемою, а їх характеристики в загальному вигляді подано в табл.1.

Таблиця 1

Характеристика типових елементарних ланок

№ п/п	Ланка	Рівняння	Передаточна кція	Перехідна функція
----------	-------	----------	---------------------	-------------------

1.	Аперіодична	$T \frac{dx}{dt} + x = KU$	$W(p) = \frac{K}{Tp + 1}$	
2.	Підсилювальна (пропорційна, нерційна)	$x = KU$	$W(p) = K$	
3.	Інтегрувальна	$x = \frac{1}{T_i} \int_0^t U dt$	$W(p) = \frac{1}{T_i p}$	
4.	Диференціювальна	$x = K \frac{dU}{dt}$	$W(p) = Kp$	
5.	Коливальна	$T_1^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + T_2 \frac{dx}{dt} + x = KU$	$W(p) = \frac{K}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}$	
6.	Із запізнюванням	$x = U(t - \tau_{зп})$	$W(p) = e^{-p\tau_{зп}}$	

6. Аналіз стійкості лінійних систем

Перехідний процес в системі – сума коливальних та аперіодичних складових, при цьому кожна коливальна складова відповідає парі комплексних спряжених коренів, а кожна аперіодична складова – дійсному кореню.

Загальною умовою загасання всіх складових і перехідного процесу в цілому є від'ємність дійсних частин всіх коренів характеристичного рівняння системи, тобто полюсів (нулів знаменника) передаточної функції системи.

Якщо є хоча б один корінь з додатньою дійсною частиною, то йому відповідає розбіжна складова перехідного процесу, тобто система нестійка.

При наявності уявних коренів характеристичного рівняння в системі виникають назагасаючі коливання з частотою, яка дорівнює β_i - границя стійкості.

система стійка

/ Im

система нестійка

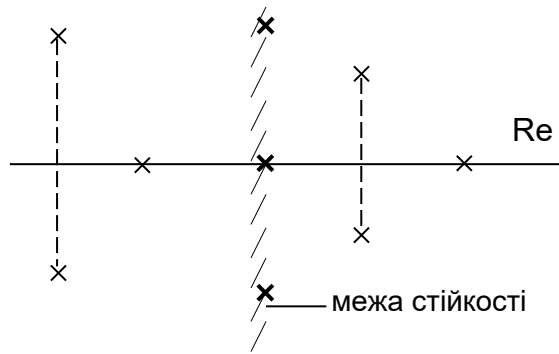


Рис.17 Розташування коренів характеристичного рівняння на комплексній площині

Розташування коренів характеристичного полінома на комплексній площині показано на рис.17. Для стійкості системи всі корені повинні лежати в лівій напівплощині (бути “лівими”), а уявна вісь є межею стійкості. На межі стійкості може розташовуватись нульовий корінь або пара чисто уявних коренів. Необхідною, але недостатньою, умовою стійкості є додатність всіх коефіцієнтів характеристичного полінома.

Для отримання характеристичного полінома можна використовувати передаточні функції системи, наприклад для замкненої системи відносно зміни завдання:

$$W_{зд}(p) = \frac{W_{роз}(p)}{1 + W_{роз}(p)} \quad (50)$$

Подамо $W_{роз}(p)$ у вигляді:

$$W_{роз}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}, \quad (51)$$

тоді

$$W_{зд}(p) = \frac{\frac{R(p)}{Q(p)}}{1 + \frac{R(p)}{Q(p)}} = \frac{R(p)}{Q(p) + R(p)} = \frac{R(p)}{D(p)}, \quad (52)$$

де: D – характеристичний поліном, який співпадає з лівою частиною рівняння системи.

Розв’язуючи проблему стійкості, знаходять відповіді на ряд частинних питань:

- визначають структуру системи, в якій забезпечується стійкість;

- оцінюють межі змінювання параметрів системи, за яких вона зберігає стійкість та їх критичні значення, які виводять систему на межу стійкості (будують область стійкості);

- формують ряд додаткових заходів щодо збереження чи забезпечення стійкості, наприклад введення додаткових елементів чи зв'язків.

Таким чином, стійкість системи визначають на основі аналізу перехідного процесу або коефіцієнтів та коренів характеристичного поліному. В теорії автоматичного керування є ще один ефективний метод оцінки стійкості – використання критеріїв стійкості – узагальнених показників, які не потребують розв'язувати рівняння системи. Використовуються алгебраїчні та частотні критерії.

Алгебраїчні критерії стійкості

Алгебраїчні критерії встановлюють необхідні та достатні умови стійкості на основі визначників, складених з коефіцієнтів характеристичного рівняння системи.

На основі характеристичного полінома:

$$D(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (53)$$

складається визначник:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \quad (54)$$

Вираз (54) називається визначником Гурвиця і при його складанні виконуються правила:

- визначник має n рядків та n стовпців, в першому рядку розташовуються “непарні” коефіцієнти, після чого рядок доповнюється до числа n нулями;

- другий рядок включає всі “парні” коефіцієнти і також доповнюється нулями до числа n ;

- третій та четвертий рядки отримують зсувом вправо відповідно першого та другого рядків на один елемент, а зліва проставляється нуль. Аналогічно отримують і наступні рядки;

- в головній діагоналі визначника розташовуються всі коефіцієнти, крім a_n .

Критерій стійкості Рауса-Гурвиця формулюється так: автоматична система, яка описується характеристичним поліномом стійка, якщо при $a_n > 0$ визначник Δ_n та всі його діагональні мінори додатні.

Останній стовпець визначника Δ_n має лише один елемент $a_0 > 0$, тому використовується відома залежність:

$$\Delta_n = a_0 \cdot \Delta_{n-1}, \quad (55)$$

яка розпадається на дві за умови $\Delta_n = 0$: $a_0 = 0, \Delta_{n-1} = 0$. Коли $\Delta_n = 0$, система знаходиться на межі стійкості. При цьому при $a_0 = 0$ існує один нульовий корінь (аперіодична межа стійкості), а при $\Delta_{n-1} = 0$ існує пара уявних коренів (коливальна межа стійкості)

Для системи першого і другого порядків необхідною і достатньою умовою стійкості є додатність всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння.

Для системи третього порядку:

$$D(\lambda) = a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0, \quad (55)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \quad (57)$$

Умови стійкості:

$$a_3 > 0, \Delta_1 = a_2 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 a_1 - a_0 a_3 > 0, \Delta_3 = a_0 \Delta_2 > 0 \quad (58)$$

Остання нерівність за умови $a_0 > 0$ потребує $\Delta_2 > 0$. Таким чином, для системи 3-го порядку забезпечення стійкості вимагає не лише додатності всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння, а й певного співвідношення між ними.

Для системи 4-го порядку:

$$D(\lambda) = a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 \quad (59)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \quad (60)$$

Умова стійкості:

$$\begin{aligned} & a_4 > 0; \Delta_1 = a_3 > 0; \Delta_2 = a_2 a_3 - a_1 a_4 > 0; \\ \Delta_3 = a_1 \Delta_2 - a_3 \begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ a_4 & 0 \end{vmatrix} &= a_1 \Delta_2 - a_3^2 a_0 > 0; \Delta_4 = a_0 \Delta_3 > 0 \end{aligned} \quad (61)$$

Для систем високих порядків ($n \geq 3$) використання алгебраїчного критерія Рауса-Гурвиця стає незручним і потребує громіздких виразів. Крім того, цей критерій не дає можливості визначити, які заходи необхідно здійснити для забезпечення стійкості

Частотні критерії стійкості.

Один з частотних критеріїв – Найквіста. Основне застосування критерія Найквіста відноситься до систем, які є стійкими в розімкненому стані, що виконується в більшості випадків для технологічних об'єктів. Для цього випадку критерій Найквіста формулюється так: автоматична система керування стійка, якщо амплітудно-фазова характеристика розімкненої системи $W_{роз}(j\omega)$ не охоплює точку з координатами $(-1; j0)$ (рис.18).

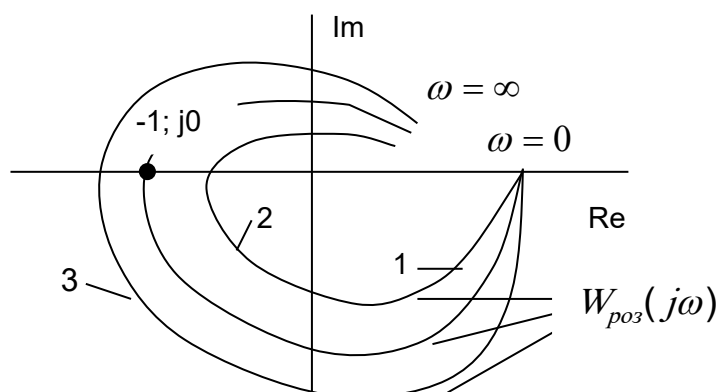


Рис.18. Амплітудно-фазові характеристики розімкненої системи (статичної)

Годограф 1 відповідає стійкій системі, 3 – нестійкій, 2 – на межі стійкості. Цей випадок справедливий для статичних систем. Для астатичних систем відповідні характеристики наведені на рис.19.

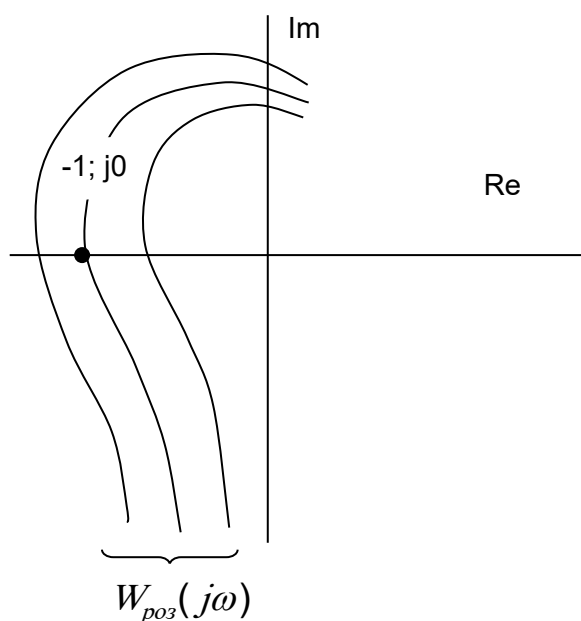


Рис.18. Амплітудно-фазові характеристики розімкненої системи (астатичної)

При подальшому аналізі використовуються такі значення частоти:

- частота зрізу, коли $A(\omega)$ (модуль $W_{роз}(j\omega)$) $= 1 - \omega_{зр}$;
 - частота, при якій фазовий зсув $\phi(\omega) = -\pi - \omega_{\pi}$.
- Тоді умова знаходження системи на межі стійкості буде:
- $$\omega_{зр} = \omega_{\pi} \quad (62)$$

Якщо проаналізувати проходження гармонійного сигналу через систему, то роль особливої точки $(-1; j0)$ полягає в тому, що:

- вона відповідає претворенню від'ємного зворотнього зв'язку в додатній;
- вона є межею між режимами підсилення і ослаблення зовнішнього сигналу системою.

Може бути випадок, коли системи є нестійкою, в розімкненому стані. Тоді критерій Найквіста формулюється так: АСР буде стійкою, коли $W_{роз}(j\omega)$ охоплює $\ell/2$ разів точку з координатами $(-1; j0)$, ℓ - число правих коренів характеристичного рівняння розімкненої системи.

Критерій Найквіста зручно використовувати для аналізу систем, які мають в своїй структурі ланки запізнювання. В цьому випадку АФХ розімкненої системи можна подати у вигляді:

$$W_{роз}(j\omega) = W_{осн}(j\omega) \cdot e^{-j\omega\tau_{zn}}, \quad (63)$$

де: $W_{осн}(j\omega)$ - АФХ основних елементів системи;

$e^{-j\omega\tau_{zn}}$ - АФХ ланки запізнювання.

Наявність ланки запізнювання погіршує, як правило, стійкість і існує критичне запізнювання, при якому система виходить на межу стійкості - $\omega_{zn}^{кр}$.

Частотний критерій стійкості А.В.Михайлова (1936 р.) заснований на аналізі характеристичного полінома системи, в який підставляється $\lambda = j\omega$:

$$D(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0 \quad (64)$$

Вираз (64) можна подати у вигляді суми дійсної та уявної частини:

$$D(j\omega) = U_D(\omega) + jV_D(\omega), \quad (65)$$

де: $U_D(\omega)$ - дійсна частина, складена з членів з парними степенями ω ;

$V_D(\omega)$ - уявна частина, яка утримує члени з непарними степенями ω .

Кожному фіксованому значенню ω відповідає комплексне число, яке можна зобразити вектором на комплексній площині. При змінюванні ω від 0 до ∞ цей вектор описує криву, яка називається годограф Михайлова. За видом годографа можна оцінювати стійкість системи. При $\omega = 0$ функція $D(j\omega) = a_0$, що впливає з виразу (65), а при $\omega \rightarrow \infty$ функція $D(j\omega)$ необмежено зростає, але проходить різну кількість квадрантів в залежності від порядку системи.

Критерій стійкості Михайлова формулюється так: автоматична система керування, якій відповідає рівняння (65), стійка, якщо при змінюванні ω від 0 до ∞

годограф $D(j\omega)$ огинає проти годинникової стрілки початок координат та проходить n квадрантів (n – порядок системи). Якщо система знаходиться на межі стійкості, то годограф проходить через початок координат (це відповідає наявності пари спряжених коренів).

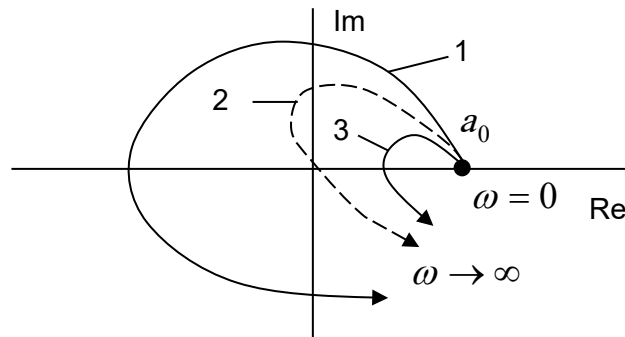


Рис.19. Годограф Михайлова

На рис.19 годограф 1 відповідає стійкій системі ($n=4$), 2 – на межі стійкості, 3 – нестійкій. При практичному використанні годографа Михайлова спочатку знаходять точки перетину його з координатними осями: при $U_D(\omega) = 0$ знаходять частоту, коли $D(j\omega)$ пересікається з уявною віссю і підставляють її значення у вираз для $V_D(\omega)$. Коли знайдено умови, за яких $D(j\omega)$ перетинає осі координат, тобто знайдено нулі $U_D(\omega)$ і $V_D(\omega)$, то повністю годограф будувати не потрібно: стійкість має місце, якщо нулі $U_D(\omega)$ та $V_D(\omega)$ чергуються з ростом ω , починаючи з $\omega = 0$, тобто $V_D(\omega) = 0$, а $U_D(\omega) > 0$.

Якщо систему можна розбити на ланки, то годограф $D(j\omega)$ можна отримати за правилами перемноження векторів.

Для оцінки стійкості системи можна використовувати також логарифмічні частотні характеристики. Це засновано на висновках, які випливають з критерія стійкості Найквіста: система буде стійкою тоді, коли при досягненні фазовою частотною характеристикою значення

-180° логарифмічна частотна характеристика буде від'ємною (криві 1, рис.20).

Це значить, що АФХ розімкненої системи не охоплює точку

$(-1; j0)$. Кривим 3 рис.20 відповідає нестійка система, 2 – на межі стійкості.



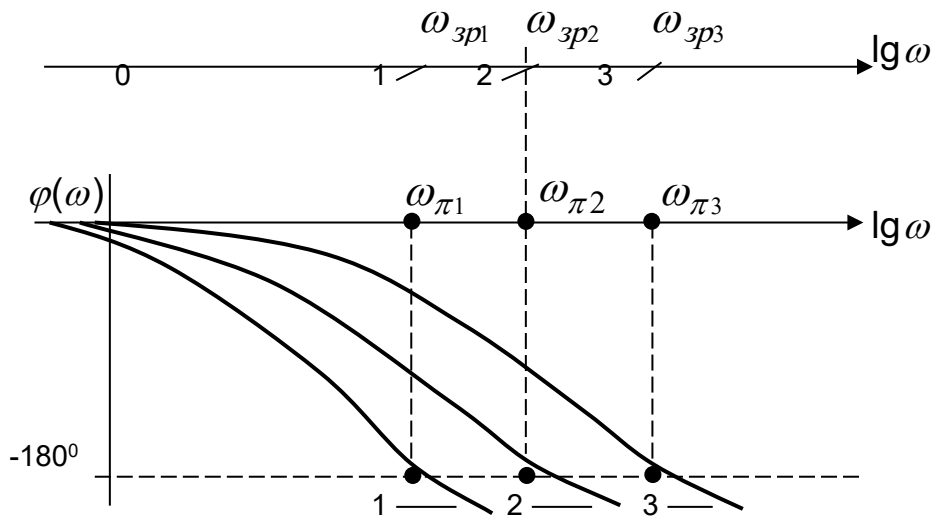


Рис.20. Логарифмічні частотні характеристики статичної системи

Область стійкості. Запас стійкості.

Реальні системи повинні бути не лише стійкими, а й забезпечувати запас стійкості, тобто зберігати стійкість при змінюваних умовах роботи та параметрів системи.

Запас стійкості можна оцінювати за розташуванням коренів характеристичного рівняння на комплексній площині: чим далі вліво від уявної осі будуть розташовані корені, тим більшим буде запас стійкості. Для оцінки запасу стійкості можна використовувати і частотний критерій Найквіста, а саме – за віддаленням АФХ розімкненої системи $W_{роз}(j\omega)$ від “небезпечної” точки $(-1; j0)$ на комплексній площині. Кількісно оцінюють запас стійкості системи за амплітудою (модулем) та фазою. Запас стійкості за амплітудою (модулем) показує, на скільки можна збільшити коефіцієнт передачі системи, щоб вона вийшла на межу стійкості. При розрахунках цей запас береться подвійним. Запас стійкості по фазі показує, на скільки повинно зрости запізнювання на частоті зрізу ω_{zp} , щоб система вийшла на межу стійкості. При розрахунках приймається запас по фазі $\geq 30^\circ$.

При створенні та експлуатації автоматичних систем часто необхідно визначати вплив змінюваних параметрів системи на стійкість. Область стійкості будується в координатах, якими є змінювані параметри і виділяє простір, в кожній точці якого система стійка. Лінія або поверхня, які обмежують область стійкості, є межею області. Коли змінюваних параметрів два, наприклад K_{per} і T_i для ПІ-регулятора, тоді область стійкості виділяється на площині $K_{per} - T_i$. Для позначення області стійкості лінія (межа стійкості) штрихується, при цьому штриховка направляється всередину області. Межа області може будуватись шляхом

багатократного застосування одного з критеріїв стійкості при різних значеннях змінюваних параметрів.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення поняття “стійка автоматична система регулювання”.
2. Зобразіть перехідні процеси для стійкої, нестійкої системи та знаходження її на межі стійкості.
3. Що таке вільний (перехідний) та змушений рух системи?
4. Проведіть аналіз характеристичного рівняння системи. Поясніть, чому дійсні корені цього рівняння повинні бути від’ємними для забезпечення стійкості?
5. Покажіть розташування коренів характеристичного рівняння на комплексній площині.
6. Як тримати характеристичне рівняння системи за її передаточними функціями?
7. Наведіть формулювання алгебраїчного критерія стійкості Рауса-Гурвиця.
8. Визначте умови стійкості системи 1-го, 2-го, 3-го порядків на основі критерія Рауса-Гурвиця.
9. Сформулюйте частотний критерій стійкості Найквіста.
10. Покажіть годограф $W_{роз}(j\omega)$ для статичних та астатичних систем при використанні критерія Найквіста.
11. Наведіть формулювання та математичні залежності для частотного критерія стійкості Михайлова.
12. Як використовуються логарифмічні частотні характеристики для оцінки стійкості АСР?
13. Що таке області стійкості, від чого залежать їх розміри?
14. Чому необхідно забезпечувати запас стійкості АСР? Які показники запасу стійкості?
15. Що таке критичне значення коефіцієнта передачі системи. Наведіть приклад.
16. Наведіть приклад побудови області стійкості для системи 3-го порядку.
17. Що таке D-розбиття і як цей метод використовується при побудові областей стійкості.
18. Наведіть приклад структурно нестійкої системи.
19. Як впливає значення коефіцієнта передачі системи на стійкість?

7. Показники перехідних процесів

Використовують прямі показники перехідного процесу та узагальнені показники (рис.21).



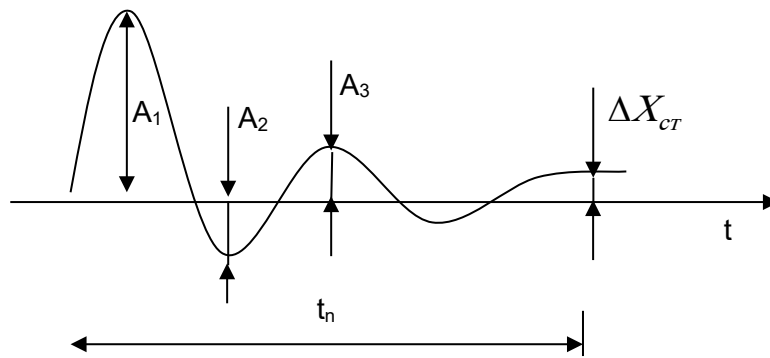


Рис.21. Графік перехідного процесу АСР відносно збурення

Прямі показники якості перехідного процесу визначають безпосередньо за його графіком (рис.21). До них відносяться:

- динамічна похибка A_1 , яка визначає найбільше відхилення регульованої координати від заданого значення, $A_1 \leq A_1^{don}$, тобто ця похибка не повинна перевищувати допустимої за технологічними вимогами;

- статична похибка $\Delta X_{cm} \leq \Delta X_{cm}^{don}$, яка виникає лише в статичних системах, наприклад з П-регулятором;

- час перехідного процесу, $t_n \leq t_n^{don}$, який визначається як інтервал часу, за який перехідний процес закінчується ($\Delta X_{cm} = const$ або $\Delta X_{cm} = 0$ відповідно для статичних та астатичних систем). В практичних розрахунках приймається як інтервал часу, коли $X \leq 0.05 A_1$;

- перерегулювання

$$a = \frac{A_2}{A_1} \cdot 100\%, \quad (66)$$

який характеризує відхилення регульованої координати з різним знаком, що не допускається для деяких об'єктів. Для реальних систем $a = 20 \div 50\%$;

- оцінка коливальності (ступінь затухання)

$$\psi = \frac{A_1 - A_3}{A_1}. \quad (67)$$

Показник ψ може приймати різні значення: при $\psi = 1$ в системі відбувається аперіодичний процес, при $\psi = 0$ - незагасаючі коливання однакової амплітуди, $\psi < 0$ - розбіжний перехідний процес. Для реальних АСР значення ψ приймається в межах $0.75 \div 0.9$.

При існуючих властивостях об'єкта перехідні процеси залежать від типу автоматичного регулятора та значень параметрів настройок. Для можливості порівняння різних систем введемо поняття типового перехідного процесу:

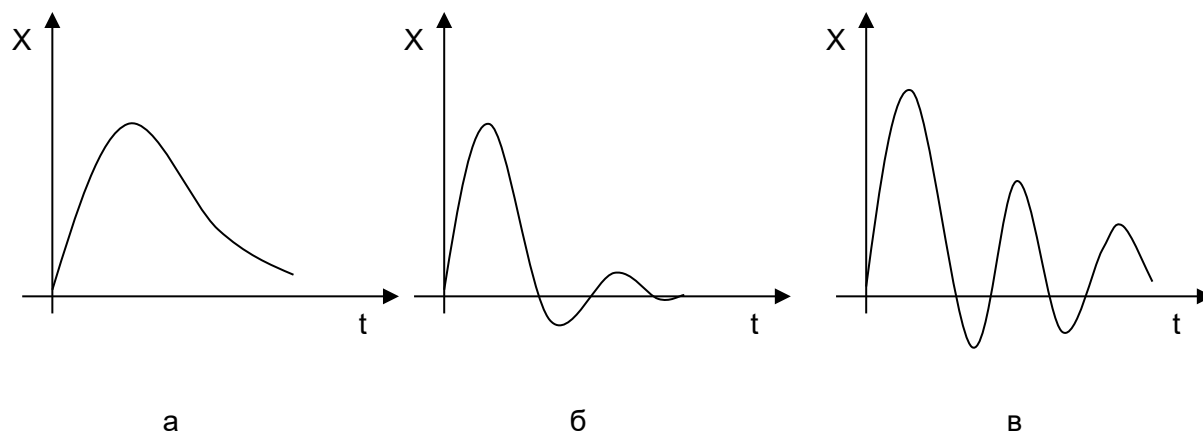


Рис.22. Типові перехідні процеси АСР

- граничний аперіодичний (рис.22,а), який характеризується значним динамічним відхиленням (динамічною похибкою), але має мінімальний час регулювання. Підкреслимо ще раз, що є ряд об'єктів, які не допускають змінювання регульованої координати з різними знаками відносно заданого значення;

- коливальний з 20%- (рис.22,б) або 50%-вим (рис.22,в) перерегулюванням. Перший з них характеризується мінімальним часом першого напівперіода та дещо меншою динамічною похибкою, другий має мінімальне значення динамічної похибки та найменшу оцінку у вигляді інтегралу $\int_0^{t_n} X^2 dt$, але при цьому зростає час перехідного процесу.

Прямі показники перехідного процесу зв'язані між собою: зменшення A_1 приводить до збільшення коливальності та часу перехідного процесу.

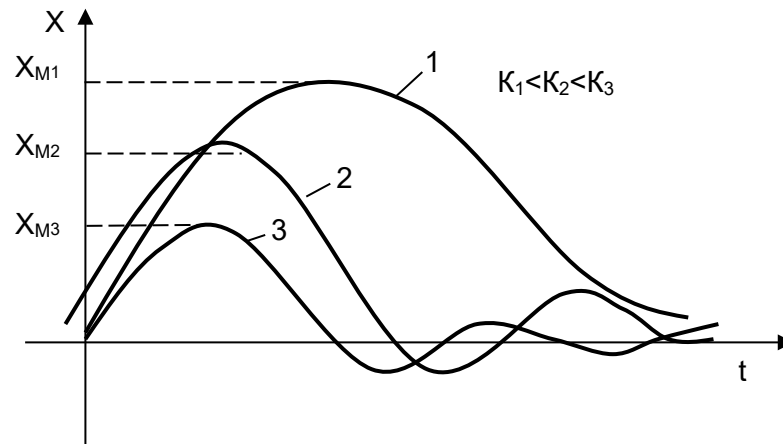


Рис.23. Вплив коефіцієнта передачі розімкненої системи на показники якості перехідного процесу

На рис.23 показані перехідні процеси при різних значеннях K , звідки видно, що при синтезі АСР завжди необхідно шукати компроміс між значеннями динамічної похибки, коливальності та тривалістю перехідного процесу.

Наведені прямі показники якості перехідних процесів зручно використовувати при експериментальних дослідженнях АСР та комп'ютерному моделюванні. На стадії синтезу АСР використовуються непрямі показники (критерії) якості, які дають можливість визначити, якою буде майбутня АСР за її характеристиками.

8. Критерії якості перехідних процесів автоматичних систем керування

Якість перехідних процесів АСР можна визначити за частотними, кореневими або інтегральними критеріями.

Найбільшу наочність мають частотні критерії якості, які використовують властивості частотних характеристик замкненої та розімкненої системи. Так, за видом амплітудно-частотної характеристики замкненої системи за зміною завдання (рис.24) можна визначити частотний показник коливальності:

$$M = \frac{A_M(\omega)}{A(0)} \quad (67)$$

Чим більше це відношення, тим сильніша коливальність і, як наслідок, тривалість перехідного процесу t_n . Якість вважається задовільною при $M = 1.1 \div 1.5$. Непрямими частотними показниками швидкодії системи є характерні частоти: резонансна ω_p , незагасаючих коливань ω_0 (часто можна прийняти $\omega_0 \approx \omega_p$) та частота пропускання $\omega_n \approx 3 \cdot \omega_0$.

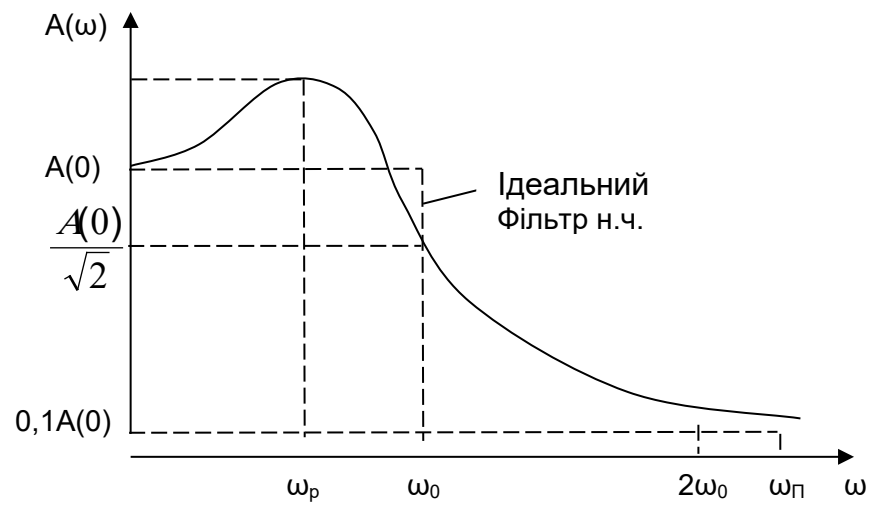


Рис.24. Амплітудно-частотна характеристика замкненої системи

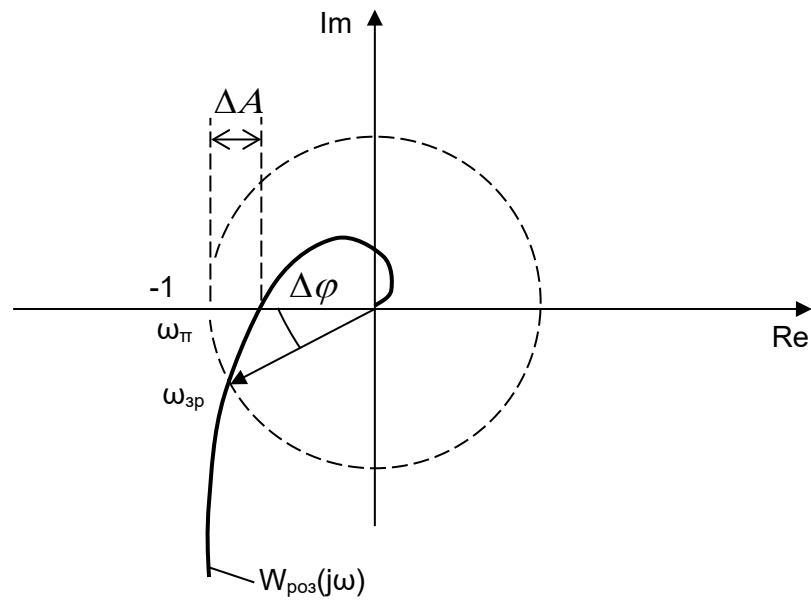


Рис.25. Показники запасу стійкості

За амплітудно-фазовою характеристикою розімкненої системи $W_{роз}(j\omega)$ (рис.25) можна визначити запас за амплітудою:

$$\Delta A = 1 - A(\omega_{\pi}) \quad (69)$$

та за фазою:

$$\Delta \phi = |\pi - \phi(\omega_{зр})| \quad (70)$$

Ці показники фактично характеризують віддаленість кривої $W_{роз}(j\omega)$ від критичної точки на комплексній площині з координатами $(-1; j0)$. Раніше відзначалось, що при проектуванні систем приймається запас стійкості за амплітудою $\Delta A = 0.5 \div 0.6$ і за фазою $\Delta \phi = 30 \div 60^\circ$. Такі показники запасу стійкості забезпечують і необхідну якість перехідних процесів.

Між частотними та часовими характеристиками системи існує однозначний зв'язок. Так визначено, що перехідна функція замкненої системи може визначатись за дійсною $U(\omega)$ або уявною $V(\omega)$ частотними характеристиками замкненої системи:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{U(\omega) \sin(\omega t)}{\omega} d\omega, \quad (71)$$

$$h(t) = U(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{V(\omega) \cos(\omega t)}{\omega} d\omega, \quad (72)$$

де: $h(t)$ - перехідна функція замкненої системи, тобто часова характеристика при одиничному ступінчатому діянні.

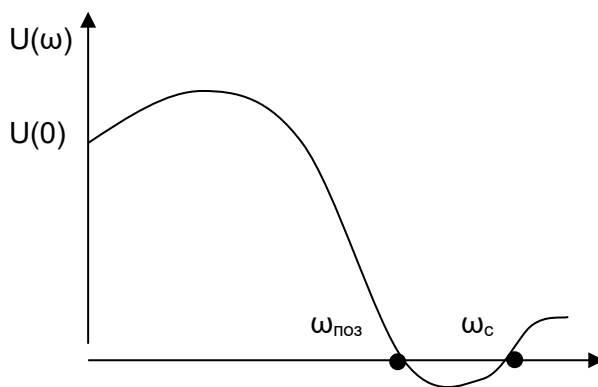


Рис.26. Дійсна частотна характеристика замкненої системи

Для оцінки якості перехідних процесів можна використовувати дійсну частотну характеристику замкненої системи, наприклад за зміною завдання (рис.5.6). Інтервал частот $0 \div \omega_{поз}$ - називається інтервалом позитивних частот, $0 \div \omega_c$ - суттєвих. Після ω_c $U(\omega)$ мало впливає на якість перехідного процесу. Якщо для частоти $\omega > \omega_n$ виявиться, що $U(\omega) < 0.2 \cdot U(0)$, то в першому наближенні можна приймати до уваги лише інтервал позитивності $0 \div \omega_n$. Значення $U(0)$ при частотах $\omega > \omega_n$ та $\omega > \omega_c$ впливає лише на початок перехідного процесу і їх можна відкинути, а початок $U(\omega)$ визначає головним чином кінцеву частину перехідного процесу. Аналіз інтегралів (71)-(72) та графіку $U(\omega)$ (рис.26) дає можливість зробити такі оцінки щодо якості перехідного процесу:

- статична похибка $X(\infty)$ після нанесення одиничного стрибка дорівнює $U(0)$. Якщо це зміна завдання, то $U(0)=1$ або деякому коефіцієнту K_0 (з урахуванням відтворення зміни завдання). При оцінці характеристик відносно збурення $U(0) \rightarrow \min$, а в астатичній системі $U(0)=0$;

- порівняння графіків рис.27, а та 27,б показує відповідність $h(t)$ та $U(\omega)$. При наявності екстремума $U(\omega)$ перехідний процес коливальний, при відсутності – аперіодичний;

- перехідний процес тим швидше загасає, чим більше значення ω_n (при цьому менша інерційність);

- для мінімально-фазових систем замість $U(\omega)$ можна використовувати $A(\omega)$.

Кореневі критерії якості дають можливість оцінити або задати показники перехідного процесу за розташуванням коренів характеристичного полінома на комплексній площині. При цьому необхідно аналізувати не лише полюси (як при аналізі стійкості), а й

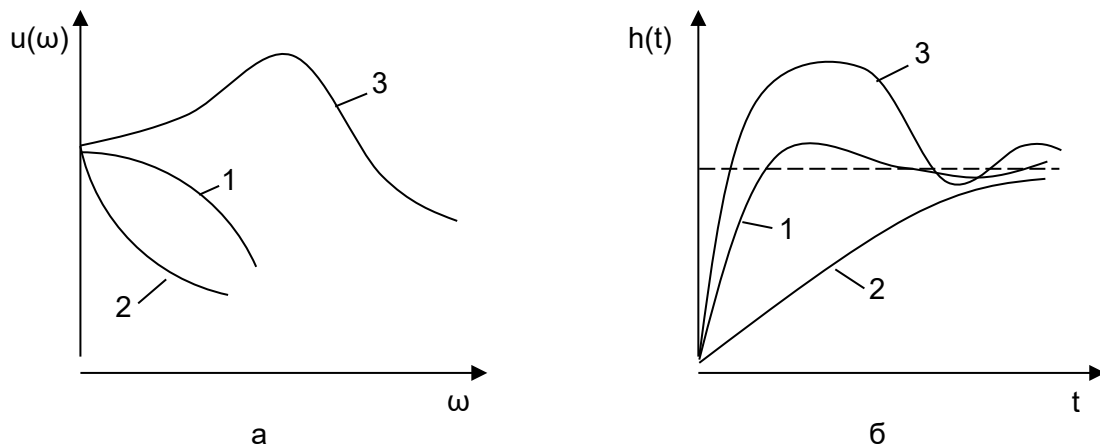


Рис.27. Дійсна частотна (а) та перехідна (б) характеристики замкненої системи

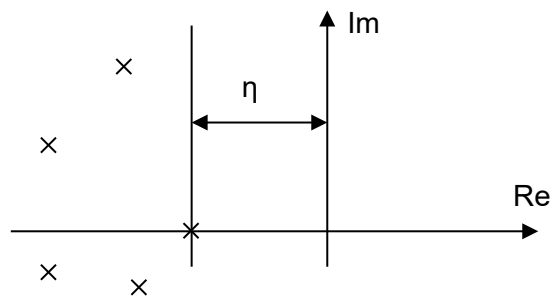


Рис.28. Ступінь стійкості системи

Критерій тривалості – ступінь стійкості η (рис.28) показує відстань від уявної осі (яка є межею стійкості) до найбільшого кореня характеристичного рівняння замкненої системи. Час затухання окремої складової перехідного процесу визначається величиною $e^{\alpha_i t}$, або $e^{-\frac{t}{T_i}}$, де $T_i = \frac{1}{|\alpha_i|}$ – постійна часу загасання, α_i – дійсна частина i -го кореня характеристичного рівняння. Тривалість певної складової $t_{ni} \approx 3T_i$, тобто вона обернено пропорційна абсолютному значенню дійсної частини відповідного кореня.

На комплексній площині корінь, який визначає найбільшу коливальність, відповідає куту $\gamma = \arctg \left| \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right|$ (рис.29).

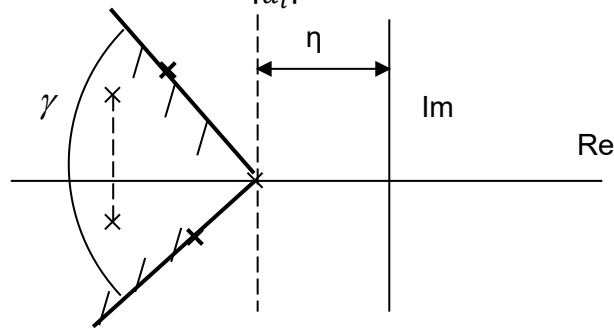


Рис.29. Ступінь коливальності системи

При використанні критеріїв η і μ необхідно враховувати, що оцінки тривалості та коливальності перехідних процесів є граничними, тобто перехідний процес в системі може мати кращу якість. Якщо розглядати загальний випадок, коли передаточна функція системи має нулі, то це відповідає наявності правої частини рівняння, тому оцінка якості може бути неточною, але завжди якість перехідних процесів тим краще, чим більше η і менше μ .

Одними з найбільш зручних для оцінки якості перехідних процесів є інтегральні критерії якості, особливо при використанні комп'ютерного моделювання. Це узагальнені показники, які фактично дають оцінку величини площі під кривою перехідного процесу, і тоді однозначно формулюється вимога зменшення відхилення та тривалості перехідного процесу. Використовуються такі інтегральні критерії:

- лінійний

$$I_1 = \int_0^{t_n} \Delta X dt; \quad (73)$$

- квадратичний

$$I_2 = \int_0^{t_n} (\Delta X)^2 dt; \quad (74)$$

- покращений квадратичний

$$I_3 = \int_0^{t_p} \left((\Delta X)^2 + T_e^2 \left(\frac{d\Delta X}{dt} \right)^2 \right) dt \quad (75)$$

Лінійний інтегральний критерій I_1 є найбільш простим, його зручно використовувати для оцінки якості аперіодичних перехідних процесів, а для коливальних необхідно визначати площі різного знаку під кривими і складати їх за абсолютним значенням. Оцінка $I_1 \rightarrow \min$ може привести до перехідного процесу з малим відхиленням, але з недостатнім затуханням.

Найбільш зручним є квадратичний інтегральний критерій I_2 . При його використанні найбільшу вагу мають перші амплітуди, що також може привести до

перехідних процесів з недостатнім затуханням. Цей критерій безпосередньо зв'язаний з характеристиками системи, його значення можна знайти за формулою Релея:

$$I_2 = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} |W_{збур}(j\omega)|^2 \cdot |Z(j\omega)|^2 d\omega \quad (76)$$

де: $W_{збур}(j\omega)$ - АФХ замкненої системи за каналом збурення;

$Z(j\omega)$ - Фур'є-перетворення збурення.

Урахування в критерії I_2 швидкості відхилення змінної розширює діапазон його застосування, а ваговий коефіцієнт T_v безпосередньо пов'язаний з часом перехідного процесу: $\frac{t_n}{6} \leq T_v \leq \frac{t_n}{3}$, де t_n - бажана тривалість перехідного процесу. Квадратичний інтегральний критерій можна обчислити за коефіцієнтами передаточної функції системи без побудови перехідного процесу.

Різні інтегральні критерії зв'язані між собою та з прямими показниками якості перехідних процесів. Так зменшення I_2 приводить до зменшення I_1, ψ, A_1 , а також до збільшення t_n (зменшення запасу стійкості системи). В проектних розрахунках зв'язують безпосередньо значення I_2 з $\psi = 0.7 \div 0.9$ при обмеженні на A_1 .

9. Точність та чутливість АСР

Призначенням будь-якої АСР є відтворення сигналу вхідного сигналу завдання та зменшення або повна компенсація дії збурення. В умовах функціонування при детермінованих діях в АСР можна виділити два режими: стаціонарний (усталений) і перехідний. В свою чергу стаціонарний режим може бути статичним або динамічним. Статичний режим характеризується тим, що система знаходиться в стані спокою, не змінюються зовнішні дії та параметри системи. Динамічний стаціонарний режим виникає тоді, коли зовнішні діяння змінюються за усталеним законом і система знаходиться в стані змушеного руху. Цей режим може встановлюватись під впливом детермінованих або випадкових сигналів. Статичні та астатичні системи в цьому режимі мають різні показники якості перехідних процесів.

Статичний режим статичних систем можна визначити за допомогою передаточної функції замкненої системи, наприклад відносно збурення. Регульована координата в цьому випадку визначається так:

$$X(p) = W_{зб}(p) \cdot Z(p) = \frac{W_{озб}(p)}{1 + W_{pez}(p) \cdot W_{ок}(p)} \cdot Z(p) \quad (77)$$

В статиці, тобто при $p=0$, в статичній системі виникає приріст

$$\Delta X_{cm}(p)|_{p=0} = \frac{K_{об}(p)}{1+K_{рег}(p) \cdot K_{ок}(p)} \cdot \Delta Z(p) \quad (77)$$

- в статичній системі завжди виникає статична похибка ΔX_{cm} (рис.30, 1 - аперіодичний процес, 2 - коливальний);

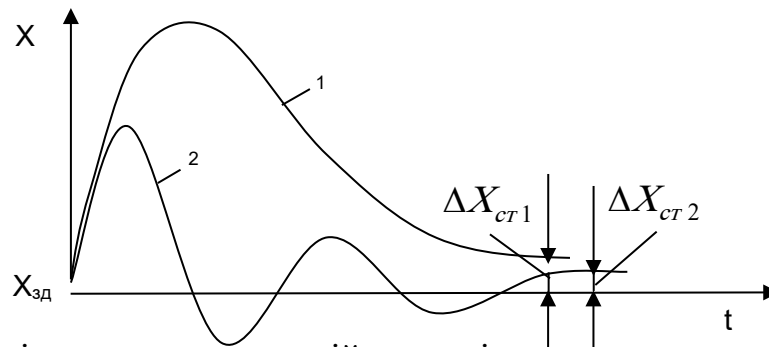


Рис.30. Перехідні процеси в статичній системі

- статична похибка залежить від $K_{сист.} = K_{рег} \cdot K_{ок}$;
- при збільшенні коефіцієнта передачі регулятора $K_{рег} \rightarrow \infty$ можна значно зменшити ΔX_{cm} , але існує межа – критичне значення $K_{рег}^{крит}$, при якому система втрачає стійкість.

Такий аналіз можна виконувати лише після того, коли АСР приведена до одноконтурної, тому що статична система може мати інтегральні ланки, охоплені від'ємним зворотнім зв'язком, що перетворює їх на аперіодичні (статичні). На рис.5.12 показано таке з'єднання, для якого еквівалентна передаточна функція буде:

$$W_{екв}(p) = \frac{\frac{K}{p}}{1 + \frac{K}{p} K_{зз}} = \frac{K}{p + K_{зз} \cdot K} \quad (78)$$

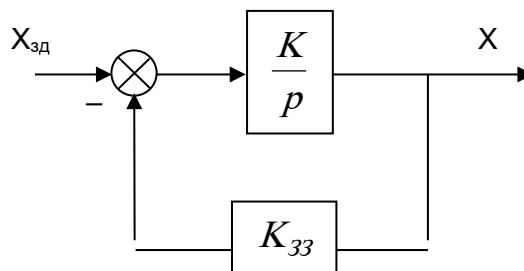


Рис.31. Інтегральна ланка із зворотнім зв'язком

При дії збурення Z відношення:

$$\delta_{стат} = \frac{\Delta X_{ст}}{Z} = \frac{K_{озб}}{1 + K_{рег} \cdot K_{ок}} \quad (79)$$

називається статизмом і показує величину статичного відхилення на одиницю зміни Z . В слідкуючих системах

$$\Delta X_{ст} = \frac{1}{1 + W_{роз}(p)} \Delta X_{зд} = \frac{1}{1 + K_{сист}} \Delta X_{зд} \quad (80)$$

Якщо в системі діє кілька збурень, то

$$\Delta X_{ст} = \frac{\sum_{i=1}^n K_{озбi} \Delta Z_i}{1 + K_{сист}} = \sum_{i=1}^n \delta_{сист} \Delta Z_i \quad (81)$$

Статизм, за винятком спеціальних випадків, є небажаним тому, що в цьому випадку неточно підтримується заданий режим: $X(t) \neq X_{зд}$. В більшості випадків приймаються спеціальні заходи для усунення статизму:

- створення такої структури системи, для якої $W_{озб}(p) = 0|_{p=0}$ ($K_{озб} = 0$), що можна реалізувати в багатоконтурних системах, наприклад в комбінованій та з додатковими сигналами;
- введення інтегральної ланки, наприклад інтегрального регулятора, тоді:

$$\Delta X_{ст} = \frac{K_{озб}}{1 + \frac{K_{рег}^i}{p}} \Delta Z \Big|_{p=0} = 0 \quad (5.31)$$

Таким чином усувається $\Delta X_{ст}$, але це справедливо лише тоді, коли інтегральна ланка знаходиться за межами об'єкта. Якщо ж об'єкт має інтегральну ланку, то статична похибка не усувається:

$$\Delta X_{ст} = \frac{\frac{1}{p} W'_{озб}(p)}{1 + \frac{1}{p} W'_{роз}(p)} Z \Big|_{p=0} = \frac{K_{озб}}{K_{рег}^i K_{ок}} Z \quad (82)$$

де: $W'_{озб}(p), W'_{роз}(p)$ - передаточні функції об'єкта та розімкненої системи, з яких попередньо винесено множник $\frac{1}{p}$.

Таким чином, астатичною ($\Delta X_{ст} = 0$) буде система, в якій інтегральна ланка входить в регулятор або в об'єкт, але при статичному регуляторі і астатичному об'єкті $\Delta X_{ст} \neq 0$.

Динамічні стаціонарні режими можуть виникати в тих випадках, коли на систему діють сигнали:

- гармонійний, тоді стаціонарний динамічний сигнал визначається частотними характеристиками;
- з постійною швидкістю $Z = V \cdot t$ або з прискоренням $Z = \frac{at^2}{2}$.

Для аналізу динамічних стаціонарних режимів в загальному випадку приймається, що зовнішній сигнал змінюється з постійною m -ою похідною.

Кількість інтегральних ланок в системі визначає її порядок астатизму. При визначенні порядку m збурення (порядку фіксованої похідної) можна зробити такі загальні висновки:

- якщо в передаточній функції об'єкта за каналом збурення $W_{озб}(p)$ немає інтегральних ланок, то $\Delta X_{уст}(p) = 0$, коли порядок астатизму системи вищий порядку діяння;
- $\Delta X_{уст}(p)$ має кінцеве значення при рівності цих порядків;
- якщо $W_{озб}(p)$ має l інтегруючих ланок, то для отримання таких же результатів порядок астатизму системи необхідно збільшити на l .

На рис.33 показані амплітудно-частотні характеристики типової системи.

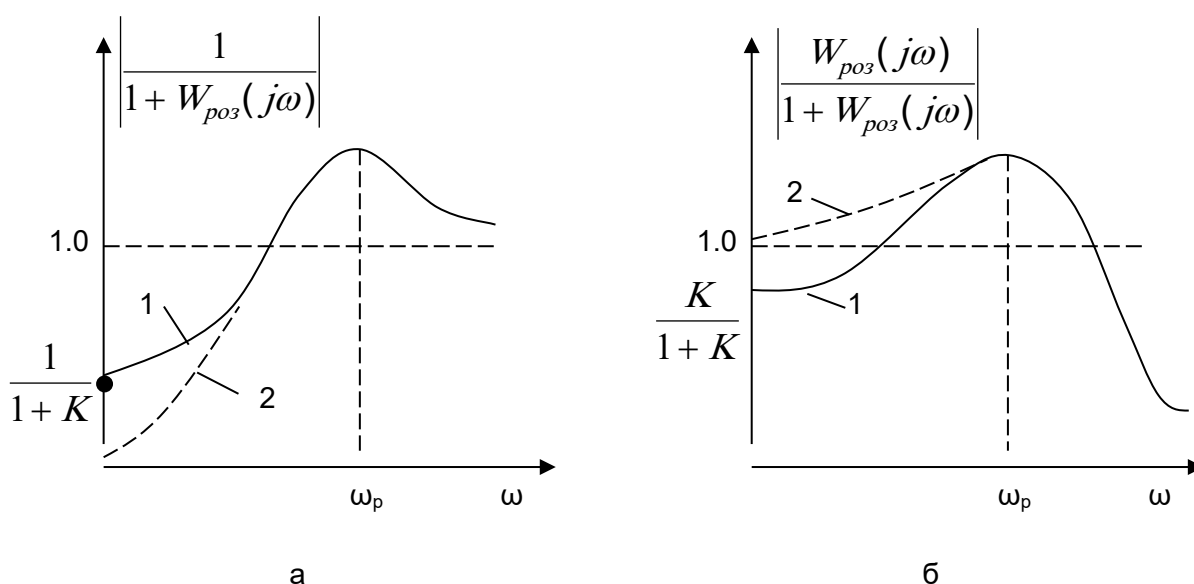


Рис. 33. Амплітудно-частотні характеристики типової системи: 1 – статичної, 2 – астатичної

Аналізуючи сигнал похибки (рис.33,а), можна зробити такі висновки:

- якщо частота зовнішнього сигналу $\omega_{зовн} \ll \omega_p$, то амплітуда сигналу похибки мала і система добре виконує функції відтворення та подавлення;
- якщо $\omega_{зовн} \gg \omega_p$, то амплітуда сигналу похибки дорівнює амплітуді зовнішнього сигналу, тобто система некорисна. Це пояснюється тим, що система має інерційний об'єкт і не встигає реагувати на височастотні діяння;
- при $\omega_{зовн} \approx \omega_p$ амплітуда сигналу похибки навіть більша амплітуди діяння, тобто система може бути шкідливою.

Для безпосередньої оцінки якості системи в задачах аналізу та синтезу АСР необхідно отримати перехідні процеси при дії різних зовнішніх сигналів. Для цього використовуються: аналітичні методи розв'язання диференціальних рівнянь системи; графо-аналітичні методи на основі частотних характеристик; методи

чисельного інтегрування та комп'ютерного моделювання. Найбільш зручним і наочним є, безумовно, останні методи, в яких використовуються програмний засіб MATLAB з широкими функціональними можливостями та SIAM, призначений для структурного моделювання АСР.

Графо-аналітичний метод побудови перехідних процесів заснований на використанні дійсної частотної характеристики замкненої системи $U(\omega)$, з якою перехідна функція зв'язана відомою залежністю:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega \quad (83)$$

Безпосередньо вираз (83) використовувати не зручно, тому розроблено графо-аналітичний метод, який дістав назву трапецеїдальних частотних характеристик. Графік частотної характеристики $U(\omega)$ замінюється сумою типових трапецеїдальних характеристик (рис.34), кожній з яких відповідає певна складова перехідного процесу. За коефіцієнтом нахил $\alpha = \omega_1 / \omega_2$ за таблицями знаходять значення $h_{\alpha}(\bar{t})$, де $\bar{t}$ - відносний час. Перехідний процес в системі буде сумою складових $h_{\alpha}(\bar{t})$.

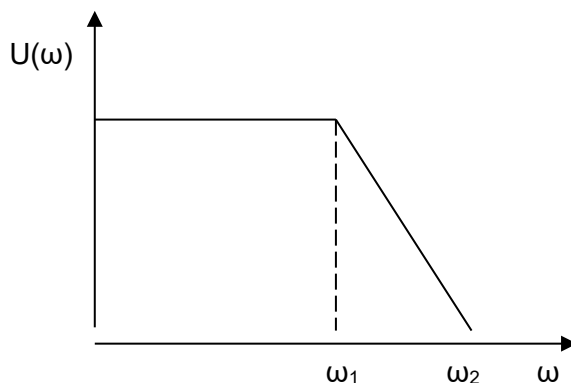


Рис. 34. Типова трапецеїдальна дійсна частотна характеристика

В реальних системах автоматичного регулювання завжди є параметри, які змінюються в процесі роботи. Це стосується в першу чергу змін параметрів об'єкта, змінювання властивостей системи (вихідних змінних, координат стану, показників якості перехідних процесів) при відхиленні параметрів системи від розрахункових, початкових значень називають чутливістю системи. Реальні системи повинні зберігати свої властивості при параметричних збуреннях, бути "грубими" (робастними). Кількісною оцінкою чутливості є функції та коефіцієнти чутливості.

Функція чутливості – частинна похідна характеристики системи за одним із змінюваних параметрів. Наприклад, якщо передаточна функція системи залежить від коефіцієнта K_i , то функція чутливості буде:

$$S_{K_i}^W(p) = \left(\frac{\partial W(p, K_i)}{\partial K_i} \right)_{K_i=K_{i0}}, \quad (84)$$

де: K_{i0} - розрахункове (початкове) значення K_i .

Чим менше значення функції чутливості (більш груба система), тим менше відхилення регульованої координати, тобто краща якість системи. Якщо функція чутливості – комплексне число, то її значення оцінюють за модулем.

Контрольні питання

1. Які прямі показники якості перехідних процесів використовуються для характеристики АСР?
2. Охарактеризуйте типові перехідні процеси.
3. Як впливає коефіцієнт передачі системи на якість перехідних процесів?
4. В чому полягає методика використання частотних показників якості?
5. Як на основі дійсної частотної характеристики системи визначити якість перехідних процесів?
6. Наведіть приклади кореневих критеріїв якості: тривалості та коливальності перехідних процесів.
7. Як використовуються кореневі критерії якості в задачах аналізу та синтезу АСР?
8. Прокоментуйте діаграму І.О.Вишнеградського.
9. Охарактеризуйте інтегральні критерії якості та область їх застосування.
10. Наведіть математичні залежності для оцінки статичного режиму статичних систем.
11. Наведіть оцінки точності астатичних систем.
12. Охарактеризуйте динамічні стаціонарні режими АСР.
13. Як оцінюється точність АСР при гармонійних зовнішніх діях?
14. Які методи використовуються для побудови перехідних процесів?
15. Що таке чутливість АСР? Наведіть приклади функцій чутливості.

10. Методи аналізу і синтезу лінійних систем керування.

Всі задачі теорії автоматичного керування можна об'єднати в два класи – аналізу та синтезу автоматичних систем керування. В *задачах аналізу* відома структура системи та визначені, як правило, її параметри, і необхідно оцінити властивості системи : стійкість, якість перехідних процесів, точність в усталених режимах.

Задачі синтезу є оберненими до задач аналізу : в них необхідно визначити структуру та параметри системи за поставленими показниками якості. Виходячи з цього, розрізняють параметричний та структурний синтез АСР. Прикладом простої задачі параметричного синтезу є визначення коефіцієнта передачі розімкненої системи за відомою похибкою або за умовою мінімуму інтегральної ланки.

Таким чином, *синтезом* автоматичної системи називають процедури визначення структури та параметрів системи за необхідними (заданими) показниками якості. Процедури синтезу є формалізованими, що забезпечує

єдиність результату на відміну від неформалізованих прийомів вибору системи на основі досвіду та інших факторів, якими користується розробник системи. В загальному випадку необхідно визначити алгоритмічну та функціональну структуру системи.

Алгоритмічну структуру системи (або її частину) знаходять за допомогою математичних методів на основі вимог, які записані в чіткій математичній формі. В цьому розумінні створення алгоритмічної структури називають теоретичним синтезом або аналітичним конструюванням системи керування. Добре відома задача *аналітичного* конструювання оптимальних регуляторів (АКОР).

Синтез функціональної або технічної структури передбачає формування комплексу виконуваних функцій та технічних засобів для їх реалізації, узгодження характеристик різних елементів та зв'язків між ними. Крім того, виконувані функції повинні певним чином розподілятися між пунктами керування. В загальному випадку синтез функціональної та технічної структур не може бути повністю формалізованим, а розв'язання технічних проблем виходить за рамки теорії автоматичного керування.

В цілому можна виділити такі етапи синтезу систем керування :

- формування сукупності функціонально необхідних елементів (датчики, автоматичні регулятори, перетворювачі, виконавчі механізми, регулюючі органи). Ці елементи складають незмінну частину системи;
- вибір додаткових елементів для забезпечення необхідної якості системи : компенсаторів, пристроїв корекції, введення додаткових сигналів, наприклад за похідними від змінних;
- визначення оптимальної структури на основі компромісу між точністю і якістю та простотою і надійністю;
- параметрична оптимізація, тобто визначення значень налаштувань регулятора і інших елементів, які забезпечують найкращим чином вимоги до системи.

Принципи синтезу алгоритмічної структури системи керування.

Для виконання процедур синтезу системи керування повинні бути відомими передаточні функції об'єкта за каналами зміни керування $W_{ок}(p)$ та збурення $W_{озб}(p)$, кількісні оцінки збурень, а також перешкоди в каналах завдання та вимірювання. Найкращою (ідеальною) буде система, яка найбільш точно відтворює на виході корисні сигнали (завдання) і максимально зменшує або компенсує дію збурення.

Розглянемо приклади визначення ідеальної структури системи керування.

Розімкнена система.

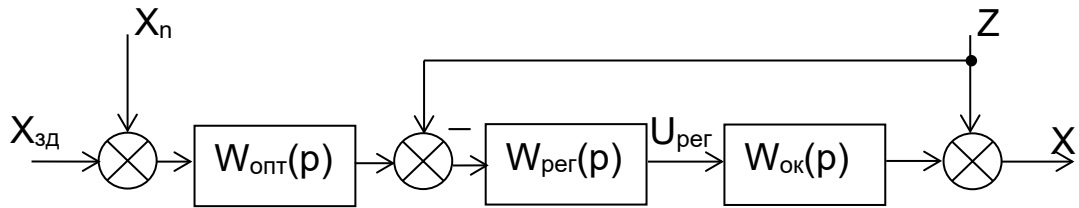
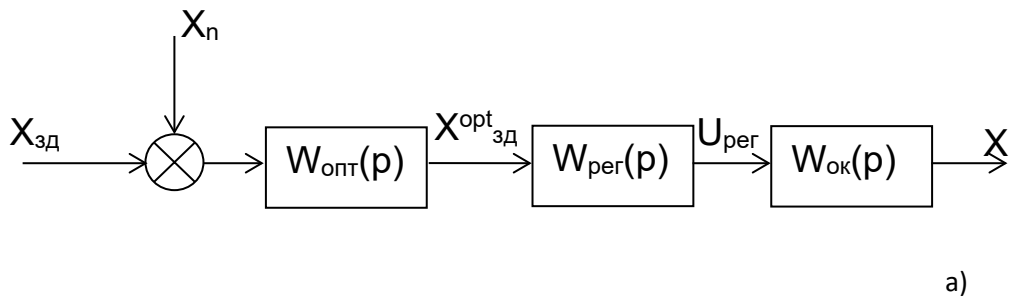


Рис.35.Алгоритмічні структури ідеальних розімкнених систем 6)

Коли на об'єкт не діє збурення (рис.35,а), то передаточну функцію регулятора можна отримати у вигляді :

$$W_{рег}(p) = \frac{1}{W_{ок}(p)} \quad (84)$$

В цьому випадку забезпечується повна (структурна) компенсація інерційності об'єкта, і система буде миттєво відтворювати на виході об'єкта сигнал $X = X_{зд}^{opt}$, який формується спеціальним фільтром з передаточною функцією $W_{опт}(p)$. Цей фільтр повністю пропускає корисний сигнал завдання $X_{зд}$ та зменшує вплив перешкоди X_n . Якщо на виході об'єкта діє збурення Z , яке можна вимірювати, то його компенсацію забезпечують введенням додаткового сигналу. В цьому випадку також для регулятора обирають передаточну функцію (6.1), тоді $W_{рег}(p) * W_{ок}(p) = 1$, тобто корисна складова вихідного сигналу X буде компенсувати Z . Якщо збурення Z не можна вимірювати, то система створюється по замкненій схемі з використанням сигналу зворотнього зв'язку.

В ідеальній замкненій системі використовується метод непрямого вимірювання збурення Z за допомогою моделі об'єкта

Передаточна функція моделі $W_m(p)$ і об'єкта $W_{ок}(p)$ повинні бути однаковими : $W_m(p) = W_{ок}(p)$, (85)

тоді сигнал ΔX^1 дорівнює :

$$\Delta X^1 = X - X_{ум} = (X_u + X_z) - X_{ум} = X_z \quad (86)$$

де : $X_u, X_{ум}$ – сигнал об'єкта та моделі, викликані сигналом регулятора U , а X_z – складова, яка визначається збуренням Z . На розрахунковому режимі $X_u = X_{ум}$.

Таким чином, дія збурення Z оцінюється складовою сигналу X_z , яка вводиться в автоматичний регулятор.

Коли на систему діють збурення Z і перешкода X_n , то в структуру системи необхідно також ввести фільтр для формування оптимального значення $X_{зд}^{opt}$.

В ідеальній системі використовується передаточна функція $\frac{1}{W_{ок}(p)}$, що створює принципову основу для структурного і параметричного синтезу системи керування, це – *метод компенсації інерційності об'єкта*. В практичних задачах реалізувати обернену передаточну функцію об'єкта точно неможливо, тому застосовується частинна компенсація інерційності об'єкта. Наприклад, послідовно з інерційним об'єктом, передаточна функція якого :

$$W_{ок}(p) = \frac{K_{ок}}{(T_1p+1) \cdot (T_2p+1) \dots (T_np+1)} \quad (87)$$

($T_1 > T_2 > T \dots T_n$ – постійні часу), включають форсуючу ланку першого – другого порядків з передаточною функцією :

$$W_k(p) = K_k(T_{K_1}p + 1)(T_{K_2}p + 1) \quad (88)$$

$$\text{причому : } T_{K_1} = T_1, T_{K_2} = T_2, K_K = \frac{1}{K_{ок}} \quad (89)$$

Не дивлячись на те, що точно реалізувати передаточні функції $\frac{1}{W_{ок}(p)}$ та (89) неможливо, основний принцип структурно-параметричної оптимізації систем керування полягає в тому, що автоматичний регулятор (пристрій керування) повинен включати передаточну функцію $\frac{1}{W_{ок}(p)}$ або близьку до неї. Передаточна функція регулятора (обведено пунктиром) буде :

$$W_{рег}(p) = \frac{W_{онм}(p) \cdot \frac{1}{W_{ок}(p)}}{1 - \frac{W_{онм}(p) \cdot W_{м}(p)}{W_{ок}(p)}} \quad (90)$$

Приймаючи, що $W_{м}(p) = W_{ок}(p)$, отримаємо :

$$W_{рег}(p) = \frac{W_{онм}(p)}{1 - W_{онм}(p)} \cdot \frac{1}{W_{ок}(p)} \quad (91)$$

Ланка з передаточною функцією $W_{опт}(p)$ здійснює оптимальну фільтрацію зовнішніх сигналів та формує $X_{зд}^{опт}$.

11. Часові методи аналізу і синтезу систем керування.

В основі часових методів синтезу лежить можливість отримання перехідних процесів, які відповідають заданим показникам якості при використанні різних законів керування. Ці *методи* називають також *прямими*. Необхідно відзначити, що отримати результати синтезу прямим методом можливо

лише для ідеальних систем, без урахування нелінійностей, фізичних явищ при передачі та перетвореннях сигналів і т.д., тому ці методи мають, в першу чергу, методологічне значення, що дає можливість отримати загальні положення та залежності.

Розглянемо часові методи аналізу і синтезу систем керування для простих структур. Автоматична система регулювання подається в спрощеному вигляді (рис.36).

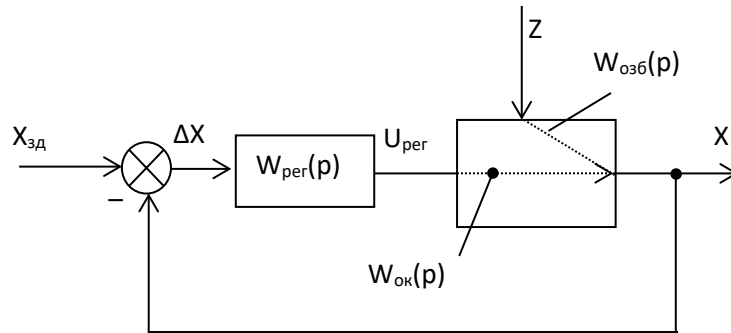


Рис.36. Структура одноконтурної АСР.

Приклад 1. Система складається з пропорційного регулятора та об'єкта 1-го порядку із самовирівнюванням. Аналіз системи виконується в такому порядку : записуються необхідні передаточні функції :

регулятора – $W_{рег}(p) = K_{рег}$

об'єкта – за каналом керування – $W_{ок}(p) = \frac{K_{ок}}{Tp+1}$

за каналом збурення – $W_{озб}(p) = \frac{K_{озб}}{Tp+1}$ (92)

- визначаються передаточні функції замкненої системи :
= відносно зміни завдання – $W_{зд}(p)$

$$W_{зд}(p) = \frac{W_{роз}(p)}{1+W_{роз}(p)} = \frac{\frac{K_{ок}}{Tp+1} \cdot K_{рег}}{1+\frac{K_{ок}}{Tp+1} \cdot K_{рег}} = \frac{K_{сист}}{T_{сист}p+1}$$

де : $K_{сист.}$ – коефіцієнт передачі системи - $K_{сист} = \frac{K_{рег} \cdot K_{ок}}{1+K_{рег} \cdot K_{ок}}$

$T_{сист.}$ – постійна часу системи – $T_{сист} = \frac{T}{1+K_{рег} \cdot K_{ок}}$

= відносно збурення – $W_{зб}(p)$

$$W_{зб}(p) = \frac{W_{озб}(p)}{1+W_{роз}(p)} = \frac{\frac{K_{озб}}{Tp+1}}{1+\frac{K_{ок}}{Tp+1} \cdot K_{рег}} = \frac{K_{сист}}{T_{сист}p+1}$$

де : $K_{сист} = \frac{K_{озб}}{1+K_{рег}K_{ок}}$

$T_{сист} = \frac{T}{1+K_{рег}K_{ок}}$ отримують перехідні процеси, наприклад за

допомогою оберненого перетворення Лапласа при стрибкоподібному вхідному сигналі :

$$X(t)_{зд} = L^{-1} \left[\frac{W_{зд}(p)}{p} \right]$$

$$X(t)_{збур} = L^{-1} \left[\frac{W_{збур}(p)}{p} \right]$$

Перехідний процес відносно зміни завдання показано на рис. 37.

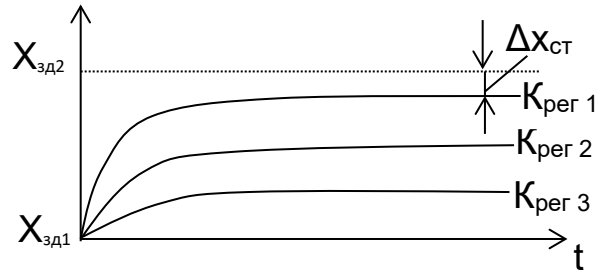


Рис.37.Перехідні процеси відносно зміни завдання ($K_{\text{рег } 1} > K_{\text{рег } 2} > K_{\text{рег } 3}$).

Система з точки зору динаміки еквівалентна аперіодичній ланці з передаточною функцією (6.12). Перехідний процес описується рівнянням :

$$X(t) = K_{\text{сист}} \left(1 - e^{-\frac{t}{T_{\text{сист}}}} \right)$$

Характеристичне рівняння системи $T_{\text{сист}}p + 1 = 0$ має один дійсний корінь $p = -\frac{1}{T_{\text{сист}}}$, що відповідає аперіодичному процесу. При зміні $K_{\text{рег}}$ змінюються лише числові значення кореня, а перехідний процес залишається аперіодичним. Збільшення $K_{\text{рег}}$ змінює загальний коефіцієнт передачі системи та її постійну часу. Зменшення $T_{\text{сист}}$ скорочує час регулювання та зменшує статичну похибку, тобто застосування П-регулятора покращує властивості системи, але статична похибка залишається. Такий же характер мають перехідні процеси відносно збурення (рис.38).

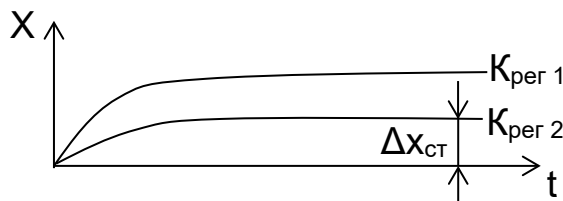


Рис.38. Перехідні процеси регулюючих органів, що відносно збурення ($K_{\text{рег } 2} > K_{\text{рег } 1}$). може привести до коливальних процесів і навіть до втрати стійкості при $K_{\text{рег}} \rightarrow \infty$

В реальних системах необхідно враховувати динамічні властивості датчиків, виконавчих механізмів

Задача параметричного синтезу в цьому випадку полягає у визначенні такого $K_{\text{рег}}$, при якому $\Delta X_{\text{ст}} \leq X_{\text{ст}}^{\text{доп}}$ за умови виконання інших обмежень, наприклад щодо стійкості.

Приклад 2. АСР складається з П-регулятора та об'єкта без самовирівнювання. Прийmemo, що передаточні функції об'єкта за каналами керування та збурення будуть відповідно :

$$W_{ок}(p) = \frac{K_{ок}}{p}$$

$$W_{озб}(p) = \frac{K_{озб}}{p}$$

Після виконання дій, які визначені в попередньому прикладі, отримаємо такі результати :

- передаточна функція замкненої системи відносно зміни завдання має

вигляд (6.12), але $K_{сист.}=1$, а $T_{сист.} = \frac{1}{K_{рег.} \cdot K_{ок}}$: перехідний процес не має статичної похибки;

- в передаточній функції відносно збурення значення параметрів такі :

$$K_{сист} = \frac{K_{озб}}{K_{рег.} \cdot K_{ок}}$$

$$T_{сист.} = \frac{1}{K_{рег.} \cdot K_{ок}}$$

Приклад 3. АСР включає І-регулятор з передаточною функцією $W(p) = \frac{K_{рег.}}{p}$ та об'єкт без самовирівнювання з передаточною функцією $W_{озб}(p) = \frac{K_{озб}}{Tp}$. Передаточна функція замкненої системи відносно збурення буде :

$$W(p) = \frac{\frac{K_{озб}}{Tp}}{1 + \frac{K_{рег.} \cdot K_{ок}}{p \cdot Tp}} = \frac{K_{озб} \cdot p}{Tp^2 + K_{рег.} \cdot K_{ок}}$$

Відповідає перехідний процес :

$$X(t) = \frac{K_{озб}}{\sqrt{K_{рег.} \cdot K_{ок} \cdot T}} \cdot \sin \sqrt{\frac{K_{рег.} \cdot K_{ок}}{T}} \cdot t$$

Таким чином, перехідний процес – це синусоїда з амплітудою $\frac{K_{озб}}{\sqrt{K_{рег.} \cdot K_{ок} \cdot T}}$

частотою $\omega = \sqrt{\frac{K_{рег.} \cdot K_{ок}}{T}}$, тобто ідеалізована система знаходиться на межі стійкості.

Реальна система з урахуванням характеристик додаткових елементів та нелінійностей буде нестійкою. Це підтверджує висновок про те, що І-регулятор не може працювати на об'єкті без самовирівнювання, тому що в цьому випадку система є структурно нестійкою.

Для прикладів з ПІ- та ПІД- регуляторами часовий аналіз приводить до громіздких виразів, не зручних для роботи. Такі системи зручно досліджувати за допомогою комп'ютерного моделювання, застосовуючи програмні засоби SIAM та MATLAB.

12. Частотні методи аналізу та синтезу АСР.

Для виконання задач аналізу та синтезу АСР використовуються різні частотні характеристики.

Частотні характеристики розімкненої системи отримуються на основі виразу : $W_{роз}(j\omega) = W_{рег}(j\omega) \cdot W_{ок}(j\omega)$, (93)

Підставляючи у вираз (6.27) передаточні функції регулятора і об'єкта при $p=j\omega$, отримують частотну характеристику розімкненої системи :

- для системи з П-регулятором :

$$W_{роз}(j\omega) = K_{рег} \cdot W_{ок}(j\omega) \quad (94)$$

В цьому і наступних прикладах приймається, що об'єкт є статичним, тобто із самовирівнюванням (рис.39).

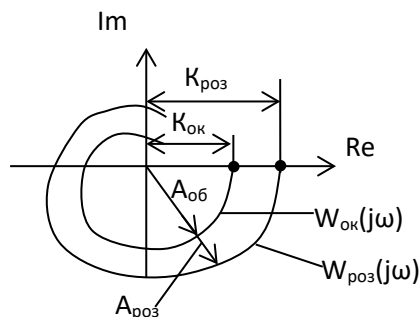


Рис.39.Частотні характеристики системи з П-регулятором.

Як видно з виразу (94) при $K_{рег}=1$ частотна характеристика розімкненої системи $W_{роз}(j\omega)$ відрізняється від частотної характеристики об'єкта лише розмірністю. При $K_{рег} \neq 1$ кожен вектор $W_{ок}(j\omega)$ змінюється по довжині в $K_{рег}$ разів, не змінюючи свого положення на комплексній площині;

- для систем з І-регулятором (рис.39) :

$$W_{роз}(j\omega) = \frac{K_{регi}}{j\omega} \cdot W_{оy}(j\omega) = \frac{K_{регi}}{j\omega} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot W_{оy}(j\omega) \quad (95)$$

Цей вираз можна переписати так :

$$W_{роз}(j\omega) = \left(\frac{K_{регi}}{\omega} \cdot A_{об}(\omega) \right) \cdot e^{-j(\phi_{об}(\omega) + \frac{\pi}{2})} \quad (96)$$

Таким чином, кожний вектор АФХ об'єкта повертається на 90° за годинниковою стрілкою (в сторону відставання) та змінюється по довжині в $\frac{K_{регi}}{\omega}$ разів.

Для системи з ПІ-регулятором (рис.40) :

$$W_{роз}(j\omega) = K_{рег} \cdot \left(1 + \frac{1}{j\omega T_i}\right) \cdot W_{ок}(j\omega) \quad (97)$$

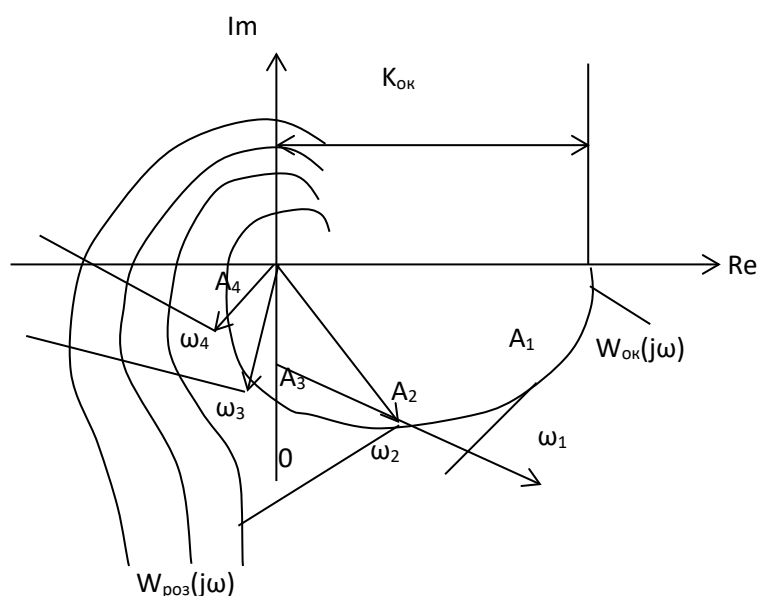


Рис.40. Частотні характеристики системи з ПІ-регулятором.

Побудова $W_{роз}(j\omega)$ виконується так :

- на АФХ об'єкта обирається кілька точок з частотами $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \dots$ з відповідними векторами $OA_1, OA_2, OA_3, OA_4 \dots$;
- до кожного вектора проводиться перпендикуляр;
- на кожному перпендикулярі відкладаються відрізки $\frac{OA_1}{\omega_1 T_i}, \frac{OA_2}{\omega_2 T_i} \dots$ і отримують $W_{роз}(j\omega)$ при $K_{рег}=1$;
- домножається кожний вектор на потрібний $K_{рег}$. Крім того, отримують сімейство $W_{роз}(j\omega)$ при різних значеннях T_i .

Необхідно відзначити, що $W_{роз}(j\omega)$ безрозмірна. Дійсно, при $\omega=0$ $W_{роз}(j\omega)=K_{рег}K_{ок}$.

Маючи $W_{роз}(j\omega)$, можна побудувати частотні характеристики замкненої системи :

- відносно зміни завдання (рис.41). Для цього використовується вираз:
- $$W_{зд}(j\omega) = \frac{W_{роз}(j\omega)}{1+W_{роз}(j\omega)} \quad (98)$$

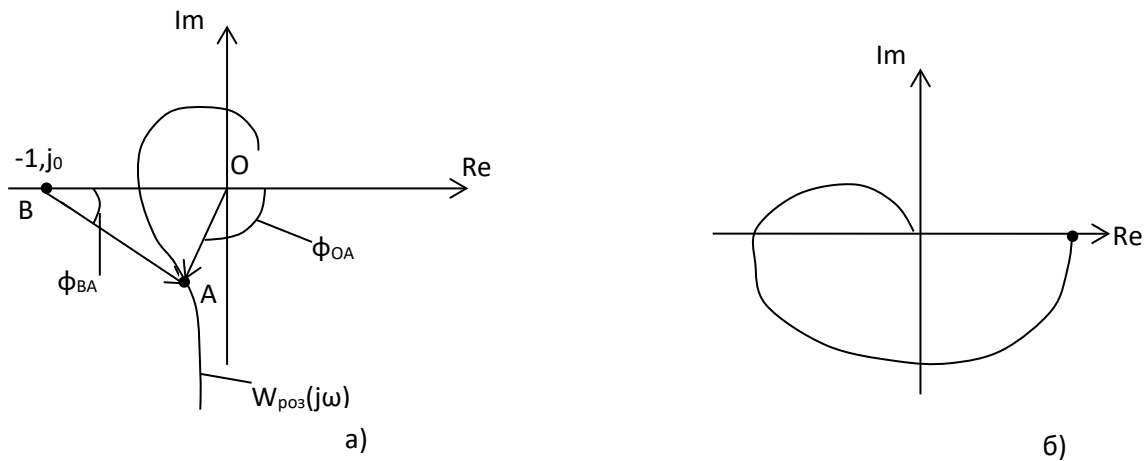


Рис.41.Частотні характеристики АСР: а) розімкненої, б) замкнутої, відносно зміни завдання.

В чисельнику виразу (99) – вектор АФХ розімкненої системи, а в знаменнику – суми векторів : $Z_1=W_{\text{роз}}(j\omega)$; $Z_2=1+i0$. Тоді значення $W_{\text{зд}}(j\omega_i)$ на певній частоті ω_i знаходиться як результат ділення двох векторів, причому АЧХ :

$$A_{\text{зд}}(\omega) = \frac{|OA|}{|BA|} \quad (100)$$

а ФЧХ : $\phi_{\text{зд}}(\omega) = \phi_{OA} - \phi_{BA}$

- відносно збурення (рис.41). Для отримання частотної характеристики замкнутої системи використовують вираз :

$$W_{\text{збур}}(j\omega) = \frac{W_{\text{озб}}(j\omega)}{1+W_{\text{роз}}(j\omega)} \quad (101)$$

Для побудови графіка АФХ замкнутої АСР необхідно поділити вектор АФХ об'єкта за каналом збурення на вектор проведений з точки В (-1,j0).

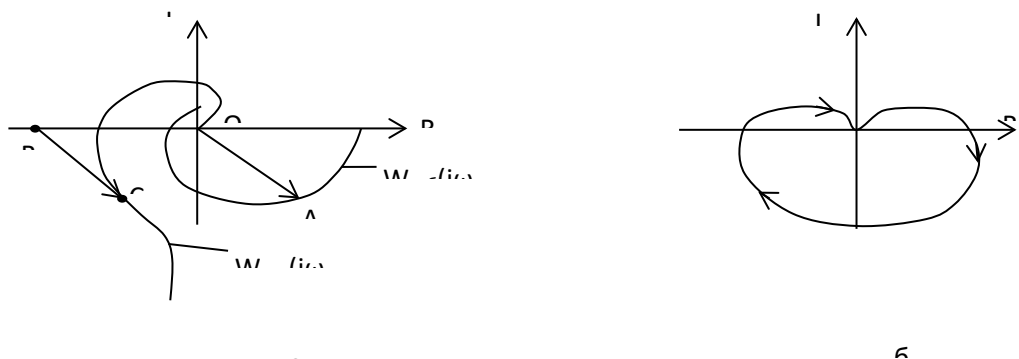


Рис.42.Частотні характеристики АСР, а) – розімкненої та об'єкта, б) замкнутої, відносно збурення.

Тоді АЧХ буде :

$$A_{3\delta}(\omega) = \frac{|OA|}{|BC|} \quad (102)$$

$$\text{а ФЧХ: } \phi_{3\delta}(\omega) = \phi_{OA} - \phi_{BC} \quad (103)$$

Необхідно відзначити, що значення вектора на різних годографах беруться на однаковій частоті ω_i .

Однією із задач дослідження АСР є визначення умов її знаходження на межі стійкості, що відповідає критичним значенням налаштувань регулятора. Для системи з П-регулятором (рис.43) умовою знаходження АСР на межі стійкості є :

$$R_{\text{крит}} * K_{\text{рег}}^{\text{крит}} = 1 \quad (104)$$

де : $R_{\text{крит}}$ – значення вектора АФХ об'єкта ; $K_{\text{рег}}^{\text{крит}}$ – критичне значення коефіцієнта передачі регулятора. Ці значення оцінюються на частоті $\omega_{\text{п}}$. Тоді :

$$K_{\text{рег}}^{\text{крит}} = \frac{1}{R_{\text{крит}}} \quad (105)$$

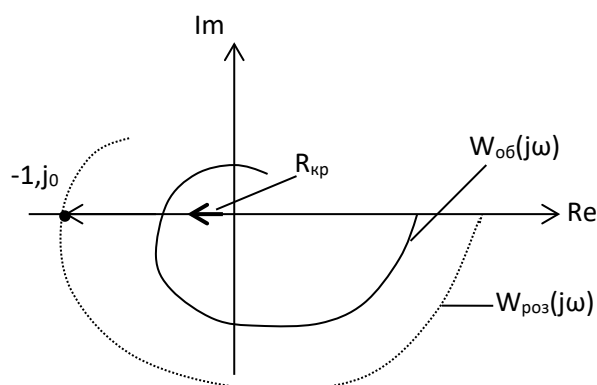


Рис.43. Частотні характеристики АСР з П-регулятором.

Для систем з І-регулятором (рис.44) необхідно враховувати, що кожен вектор АФХ об'єкта повертається на -90° , а довжина змінюється в $\frac{K_{\text{рег}_i}}{\omega}$ разів.

Тоді значення $K_{\text{рег}_i}^{\text{крит}}$ знаходять з виразу :

$$V^{\text{крит}}(\omega^{\text{крит}}) = 1 \quad (106)$$

$$K_{\text{рег}_i}^{\text{крит}} = \frac{1}{V^{\text{крит}}(\omega^{\text{крит}})} \quad (107)$$

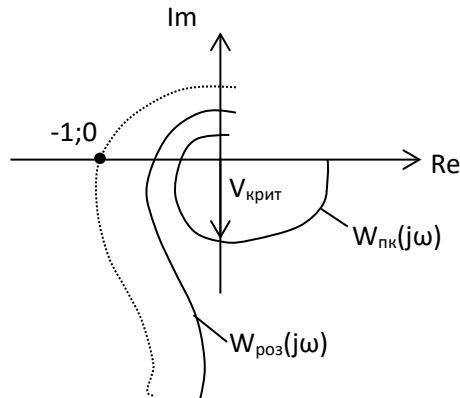


Рис.44. Частотні характеристики АСР з І-регулятором.

Цей вираз ще раз показує, що І-регулятор може працювати лише з об'єктом із самовирівнюванням. Якщо об'єкт астатичний, то АФХ системи буде охоплювати точку з координатами $(-1;j_0)$ при будь-якому значенні $K_{рег}$, тому що мінімальний зсув фаз в такій системі при частоті $\omega=0$ буде -180° .

Для системи з ПІ-регулятором будується сімейство АФХ розімкненої системи (рис.6.8) при $K_{рег} = 1$ та різних значеннях T_i . З виразу (6.37) визначається критичне значення $K_{рег}^{крит}$. В цьому випадку $R^{крит}$ – відрізки, які відсікаються на дійсні від'ємні напівосі сімейства АФХ $W_{роз}(j\omega)$. За цими даними будують область стійкості.

Для ПІД-регуляторів на площині параметрів настройки $K_{рег} - T_i$ будують сімейство кривих для різних значень відношення $T_d/T_i = \text{const}$ (рис.45).

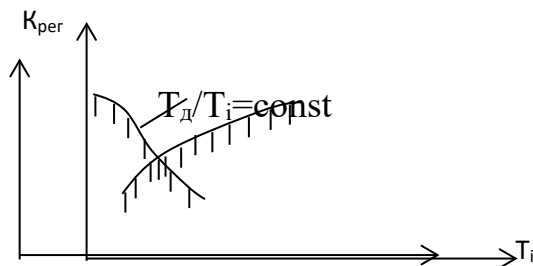


Рис.45. Область стійкості АСР з ПІ-регулятором.

Якщо частотні характеристики об'єкта задані аналітичними виразами, то при відомих АФХ регуляторів умовою знаходження АСР на межі стійкості є вираз :

$$W_{рег}(j\omega) \cdot W_{ок}(j\omega) = 1 \quad (108)$$

який розпадається на два :

$$\begin{cases} A_{рег}(\omega) = \frac{1}{A_{ок}(\omega)} \\ \phi_{рег}(\omega) = \phi_{ок}(\omega) \end{cases} \quad (109)$$

Амплітудно-фазові характеристики об'єкта і регулятора записують в такій формі :

$$W_{ок}(j\omega) = A_0(\omega)e^{-j\phi_0(\omega)} \quad (110)$$

$$W_{pez}(j\omega) = A_{pez}(\omega)e^{-j\phi_{pez}(\omega)} \quad (6.44)$$

Тоді настройки регулятора з урахуванням (111) можна знайти в явному вигляді :

$$K_{pez} = f(\omega, K_{ок}, T_1, T_2 \dots \tau_{zn}) \quad (112)$$

$$T_i = f(\omega, K_{ок}, T_1, T_2 \dots \tau_{zn}) \quad (113)$$

де : $K_{ок}$ – коефіцієнт передачі об'єкта по каналу керування, $T_1, T_2 \dots$ – постійні часу об'єкта, τ_{zn} – час запізнювання.

Користуючись частотними характеристиках, можна отримати також параметри системи, які забезпечують заданий **запас стійкості** за модулями і фазою (рис.46).

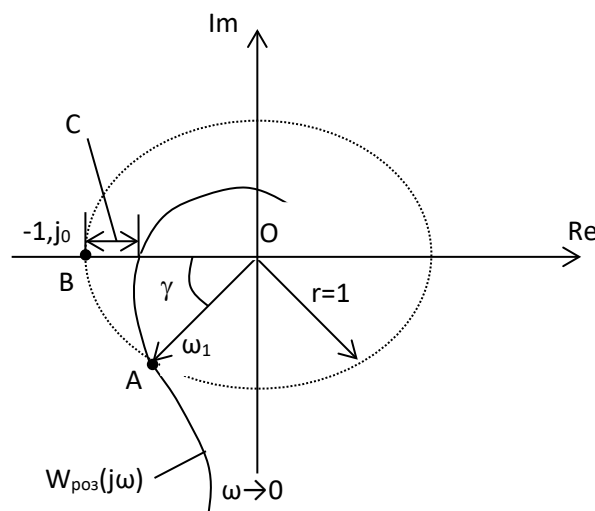


Рис.46. Визначення запасу стійкості АСР.

Якщо на фазовій площині нанести коло радіусом $r=1$, то можна визначити :

- запас стійкості по модулю C , який показує, на скільки повинен змінитись модуль $W_{роз}(j\omega)$, щоб система вийшла на межу стійкості;
- запас стійкості по фазі – кут γ , який показує, на скільки повинен змінитись зсув по фазі в розімкненій системі при існуючому модулі $W_{роз}(j\omega)$, щоб система вийшла на межу стійкості. Запас стійкості безпосередньо зв'язаний з величиною максимуму АЧХ замкненої системи (рис.47) відносно зміни завдання :

$$A_{зд}(\omega) = \frac{|OA|}{|BA|} = \frac{|W_{роз}(j\omega)|}{|1+W_{роз}(j\omega)|} \quad (114)$$

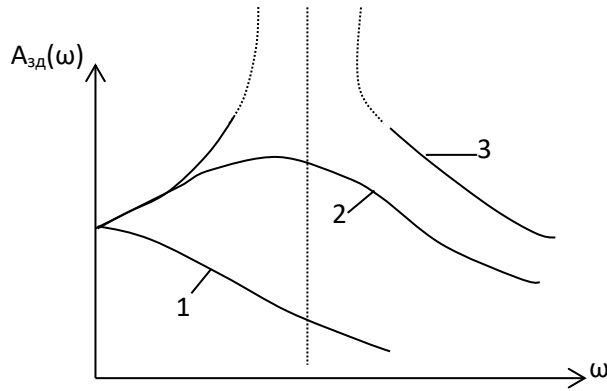


Рис. 47. АЧХ замкненої сисеми.

В залежності від розташування $W_{роз}(j\omega)$ на комплексній площині змінюється вид АЧХ. При $\omega=0$ $W_{роз}(j\omega) \rightarrow \infty$, $OA=BA$, $A_{зд}(0)=1$. При збільшенні частоти т.А переміщується угору, тоді можливі такі випадки:

- якщо $W_{роз}(j\omega)$ знаходиться достатньо далеко від точки $B(-1; j_0)$, то відрізок BA буде завжди більшим відрізка OA . При $\omega \rightarrow \infty$ $BA=1$, $OA \rightarrow 0$, $A_{зд}(\omega) \rightarrow 0$ (рис.6.16, крива 1);
- якщо $W_{роз}(j\omega)$ проходить достатньо близько від т. $B(-1; j_0)$, то відрізок BA при низьких частотах $< OA$, тому в діапазоні частот $[\omega=0, \omega_{рез}]$ $A_{зд}(\omega)$ зростає до максимуму. При $\omega \rightarrow \infty$ $OA \rightarrow 0$, $BA=1$, $A_{зд}(\omega) \rightarrow 0$ (рис. 47, крива 2). Чим ближче $W_{роз}(j\omega)$ до точки $B(-1; j_0)$, тим більший максимум $A_{зд}(\omega)$;
- якщо $W_{роз}(j\omega)$ проходить через точку $B(-1; j_0)$, то $\max A_{зд}(\omega) \rightarrow \infty$, $BA \rightarrow 0$ (крива 3, рис.47).

Таким чином, чим більший $\max A_{зд}(\omega)$, тим ближче годограф $W_{роз}(j\omega)$ до точки $B(-1; j_0)$, тим менший запас стійкості. Для забезпечення необхідного запасу стійкості $W_{роз}(j\omega)$ повинна розташовуватись на певній відстані від точки $B(-1; j_0)$, тобто не повинно перевищуватись деяке значення відношення :

$$A_{зд}(\omega) = \frac{|OA|}{|BA|} = M \quad (115)$$

де : M – показник коливальності

$$M = \frac{A_{зд}(\omega_{рез})}{A_{зд}(0)} \quad (116)$$

Таким чином, для того, щоб $\max A_{зд}(\omega)$ не перевищував деякої заданої наперед величини, $W_{зд}(j\omega)$ не повинна заходити в область, обмежену колом радіусом r (рис.48) :

$$r = \frac{M}{M^2 - 1} \quad (117)$$

центр якого розташований на відстані :

$$R_0 = \frac{M^2}{M^2 - 1} \quad (118)$$

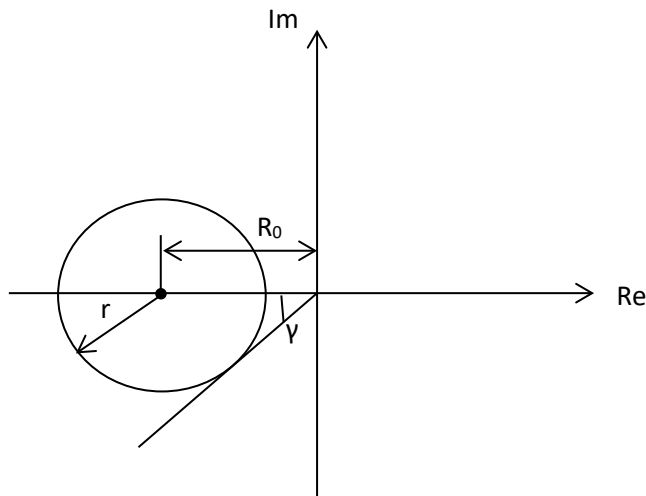


Рис.48. До визначення запасу стійкості.

Для технічних систем приймається $M = 1,1 \div 1,6$. Існує однозначний зв'язок між показником коливальності M , ступенем затухання Ψ , запасом по модулю C і фазі γ :

$$\begin{array}{ccccccc} \Psi & = & 0,7 & 0,8 & 0,9 & & \\ M & = & 2,7 & 2,09 & 1,55 & (& 9) \\ C & = & 0,28 & 0,33 & 0,44 & & \\ \gamma & = & 21^0 & 28^0 & 45^0 & & \end{array}$$

Виходячи з наведених міркувань, розроблено методику визначення параметрів системи, які забезпечують заданий запас стійкості. Для цього :

- наноситься коло, яке відповідає показнику коливань M ;
- змінюючи параметри настройки регулятора, добиваються, щоб $W_{роз}(j\omega)$ була дотичною до цього кола;
- приймаючи певне значення M , наприклад, $M=1,62$ ($\Psi \approx 0,85 \div 0,9$),

визначають:

$$\begin{cases} r = \frac{M}{M^2 - 1} = \frac{1,62}{1,62^2 - 1} = 1 \\ \gamma = \arcsin \frac{1}{1,62} = 38^0 \end{cases} \quad (120)$$

Графічна побудова зводиться до того, щоб визначити радіус r кола, яке одночасно дотикається до годографа $W_{роз}(j\omega)$ і прямої, проведеної з початку координат під кутом $\gamma = 38^0$. В площині параметрів настройки ПІ-регулятора (рис.6.18) будується область заданого запасу стійкості АСР.

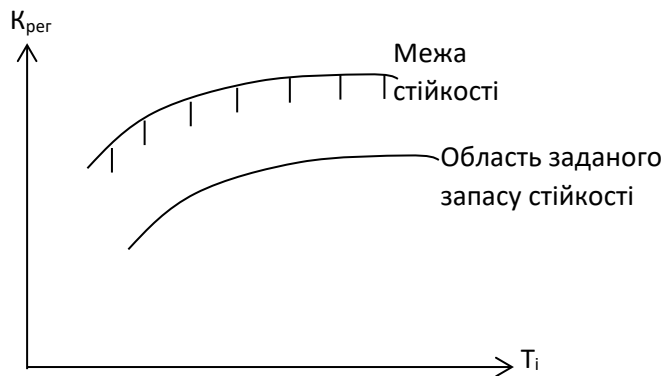


Рис.49. Область заданого запасу стійкост АСР.

13. Визначення оптимальних параметрів системи.

Однією з центральних задач прикладної теорії автоматичного керування є визначення оптимальних параметрів, зокрема значень налаштувань регуляторів. Для цього використовуються різні методи : аналітичні, графо-аналітичні та за наближеними залежностями.

При однаковій коливальності перехідні процеси в АСР можуть мати різну тривалість, статичну та динамічну похибку і інш. В умовах непередбачуваних збурень необхідно забезпечити задану якість перехідних процесів. Оптимальними налаштуваннями регуляторів будуть такі, які забезпечують досягнення найкращих результатів в конкретній ситуації при існуючих ресурсах та обмеженнях у відповідності до обраного критерія. Можна записати таку залежність :

$$A^* = \arg \min I,$$

$$U \in \Omega_u \quad (121)$$

де : A^* - вектор оптимальних значень параметрів налаштувань регулятора ($K_{\text{рег}}$, T_i , T_d); I – критерій оптимальності; U – сигнал керування. В задачах знаходження оптимальних значень параметрів налаштувань регуляторів використовуються також математичні моделі об'єкта та формуються обмеження на координати стану X , вихідні змінні Y та збурення Z .

Загальний критерій оптимальності для АСР формується так : система повинна найкраще (найбільш точно) відпрацьовувати корисні сигнали, в першу чергу вектор сигналу завдання $X_{\text{зд}}$ та компенсувати або принаймні зменшувати дію збурення Z . При цьому необхідно враховувати, що зовнішні сигнали мають різні частотні спектри, а складові гармоніки при проходженні через систему змінюються за амплітудою та фазою.

Абсолютна фільтрація (компенсація) збурень забезпечується, коли АЧХ системи відносно збурення дорівнює нулю у діапазоні частот від $\omega=0$ до $\omega \rightarrow \infty$, тобто :

$$|W_{збур}(j\omega)| = \left| \frac{X(j\omega)}{Z(j\omega)} \right| = 0 \quad (122)$$

Вимога точного відтворення $X_{зд}$ потребує, щоб :

$$|W_{зд}(j\omega)| = \left| \frac{X(j\omega)}{Z(j\omega)} \right| = 1 \quad (123)$$

В реальних системах залежності (122) та (123) не можуть виконуватись точно, тому оптимальними параметрами настрійок вважаються такі, які забезпечують максимальне наближення АЧХ реальної системи до характеристик ідеальної. Крім того, оптимізацію настрійок неможливо забезпечити у всьому діапазоні частот, а для інерційних технологічних об'єктів найбільш "небезпечними" є низькі частоти.

Одним з методів отримання значень оптимальних настрійок регуляторів є введення поняття фільтра для збурення Z (рис.50) та перенесення його на вхід системи. Виходячи з еквівалентності структур, які відповідають рис.50,а та 50,б можна записати :

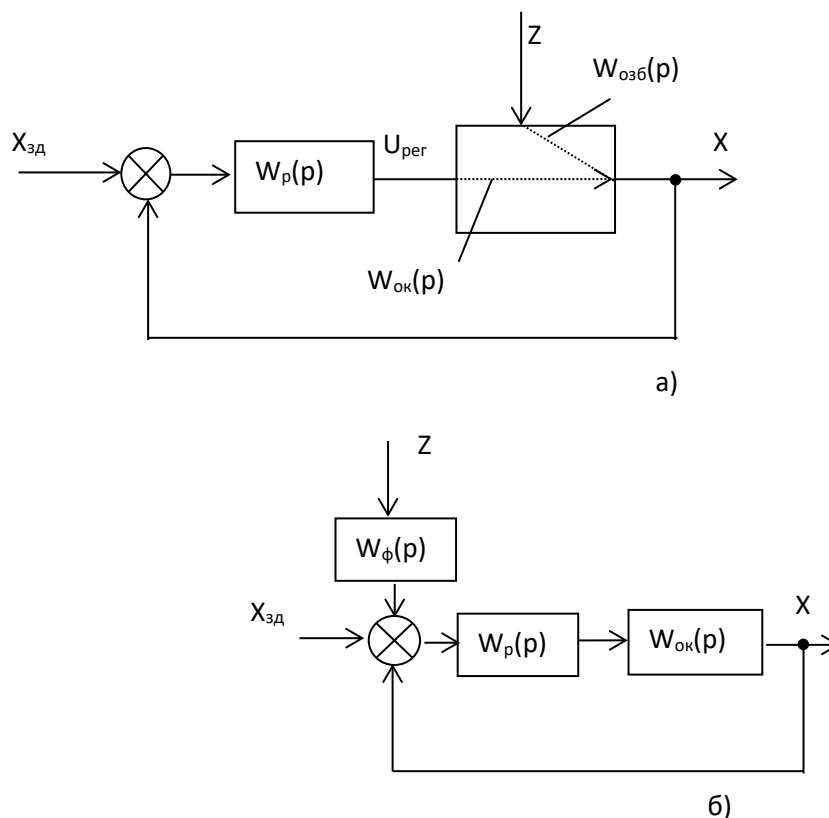


Рис 50. Структура одноконтурної АСР а) стандартної; б) з фільтром для збурення .

Для схеми а) :

$$X(p) = W_{зд}(p)X_{зд}(p) + W_{збур}(p)Z(p) \quad (124)$$

Для схеми б) :

$$X(p) = W_{зд}(p)X_{зд}(p) + W_{зд}(p)W_{\phi}(p)Z(p) \quad (124)$$

Порівнюючи праві частини виразів (123) та (124), знаходимо необхідну передаточну функцію $W_{\phi}(p)$:

$$W_{\phi}(p) = \frac{W_{збур}(p)}{W_{зд}(p)} = \frac{W_{озб}(p)}{1+W_{роз}(p)} \cdot \frac{1+W_{роз}(p)}{W_{роз}(p)} = \frac{W_{озб}(p)}{W_{роз}(p)} \quad (125)$$

Якщо властивості об'єкта залишаються постійними, то настройки регулятора оптимізуються так, щоб АЧХ фільтра і її похідні дорівнювали нулю, тобто :

$$|W_{\phi}(j0)| = 0 |W_{\phi}(j0)|' = 0 \quad (126)$$

Якщо об'єкт статичний, то при $\omega \rightarrow 0$ $W_{озб}(0)=K_{озб}$, $W_{ок}(0)=K_{ок}$. Для системи з П-регулятором вираз (6.59) прийме вид :

$$|W_{\phi}(j\omega)| = \frac{K_{озб}}{K_{ок}} \cdot \frac{1}{K_{рег}} \quad (127)$$

Таким чином, в околі точки $\omega=0$ АЧХ фільтра буде наближатись до нуля, коли $K_{рег} \rightarrow \infty$. Висновок про підвищення точності системи при збільшенні значення $K_{рег}$ вже був зроблений в попередніх розділах, але завжди існує обмеження : при $K_{рег} = K_{рег}^{крит}$ система виходить на межу стійкості, а при $K_{рег} > K_{рег}^{крит}$ стійкість втрачається.

Для системи з ПІ-регулятором АЧХ фільтра має вигляд :

$$|W_{\phi}(j\omega)| = \left| \frac{W_{озб}(j\omega)}{W_{ок}(j\omega)} \right| \cdot \frac{1}{K_{рег}} \cdot \frac{T_i \omega}{\sqrt{1+T_i^2 \omega^2}} \quad (128)$$

При $\omega=0$ цей вираз також дорівнює нулю, тобто відсутня статична похибка. Перша похідна від (127) має вид :

$$|W_{\phi}(j\omega)|' = \left| \frac{W_{озб}(j\omega)}{W_{ок}(j\omega)} \right|' \cdot \frac{1}{K_{рег}} \cdot \frac{T_i \omega}{\sqrt{1+T_i^2 \omega^2}} + \left| \frac{W_{озб}(j\omega)}{W_{ок}(j\omega)} \right| \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+T_i^2 \omega^2}} - \frac{T_i^2 \omega^2}{(\sqrt{1+T_i^2 \omega^2})^3} \right) \cdot \frac{T_i}{K_{рег}} \quad (128)$$

/При $\omega=0$ вираз (6.63) набуває виду :

$$|W_{\phi}(j\omega)|' = \frac{K_{озб}}{K_{ок}} \cdot \frac{T_i}{K_{рег}} \quad (129)$$

Таким чином, в цьому випадку необхідно щоб відношення $\frac{K_{рег}}{T_i}$ було максимальним. На площині параметрів настройки ПІ-регулятора це відповідає т.А

(рис. 51), яку отримують за допомогою дотичної до лінії межі області заданого запасу стійкості.

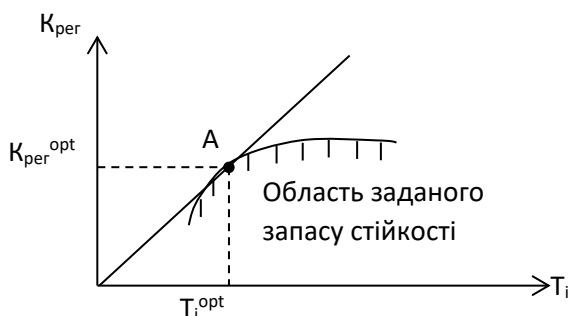


Рис.51. Визначення оптимальних налаштувань ПІ-регулятора.

Параметри налаштувань ПІ-регулятора, які відповідають т.А, будуть оптимальними і відрізняються від інших лише тим, що саме ці налаштування забезпечують максимальне зменшення збурення і точне відтворення $X_{зд}$.

Для розрахунку оптимальних налаштувань автоматичних регуляторів використовуються також *розширені частотні* характеристики (РЧХ). На відміну від звичайних при отриманні РЧХ вхідний сигнал має вигляд:

$$U = U \sin \omega - m\omega t_{max} \quad (130)$$

або в показниковій формі :

$$U = U - m\omega t^{j\omega t}_{max} \quad (131)$$

де : m – постійний параметр.

Як видно з виразів (131), (6.66) амплітуда коливань $U_{max}e^{-m\omega t}$ зменшується і викликані цим сигналом змуснені коливання будуть мати такі ж значення частот і степені затухання, але відрізнятись за амплітудою і фазою :

$$X = X - m\omega t^{j(\omega t - \phi)}_{max} \quad (132)$$

$$\psi = \frac{A_1 - A_3}{A_1} = 1 - e^{-2\pi m} \quad (133)$$

Тоді розширена частотна характеристика буде мати вигляд :

$$W(m, j\omega) = \frac{X - m\omega t^{j(\omega t - \phi)}_{max}}{U - m\omega t^{j\omega t}_{max} = \frac{X_{max}}{U_{max} \cdot e^{-j\phi}}} \quad (134)$$

Для визначення РЧХ в передаточну функцію необхідно підставити $p = (j - m)\omega$. При $m=0$ це відповідає звичайним (нормальним) частотним характеристикам (рис.53).

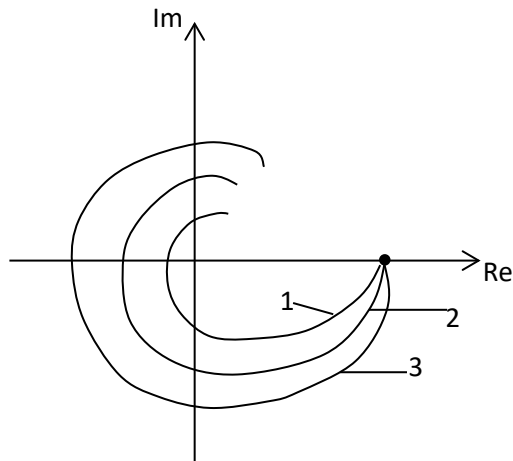


Рис.53.Звичайна та розширені частотні характеристики.

Для годографа 1 $m=0, \psi=0$;

для РЧХ 2 : $m=0,221$ ($\psi=0,75$);

для 3 : $m=0,366$ ($\psi = 0,9$).

Методика розрахунку настройок регулятора по аналогії з критерієм стійкості Найквіста базується на твердженні : якщо розімкнена система має ступінь коливальності не нижче заданого, то замкнена система буде мати такі ж показники тоді, коли РЧХ розімкненої системи пройде через точку з координатами $-1; j_0$.

Розрахунок виконують в такій послідовності :

- визначають параметри регулятора, при яких система має запас стійкості не нижче заданого;
- з попередньої умови обирають такі настройки, які забезпечують мінімум обраного критерія (лінійного або квадратичного).

Перехідні процеси в системі визначаються парою комплексних коренів, які розташовані поблизу уявної осі на комплексній площині. Тоді процес буде коливальним, а запас стійкості оцінюється ступенем затухання $\psi=0,75 \div 0,9$; $m=0,221 \div 0,366$. Основною розрахунковою залежністю є умова :

$$\begin{cases} W(m, j\omega)_{ок} \cdot W_{рег}(m, j\omega) = 1 \\ A_{рег}(m, \omega) = \frac{1}{A_{ок}(m, \omega)} \\ \phi_{рег}(m, \omega) = \phi_{ок}(m, \omega) \end{cases} \quad (135)$$

На площині параметрів настройок ПІ-регулятора наносять лінії рівного ступеню коливальності (рис.54,а) при $m_i = \text{const}$.

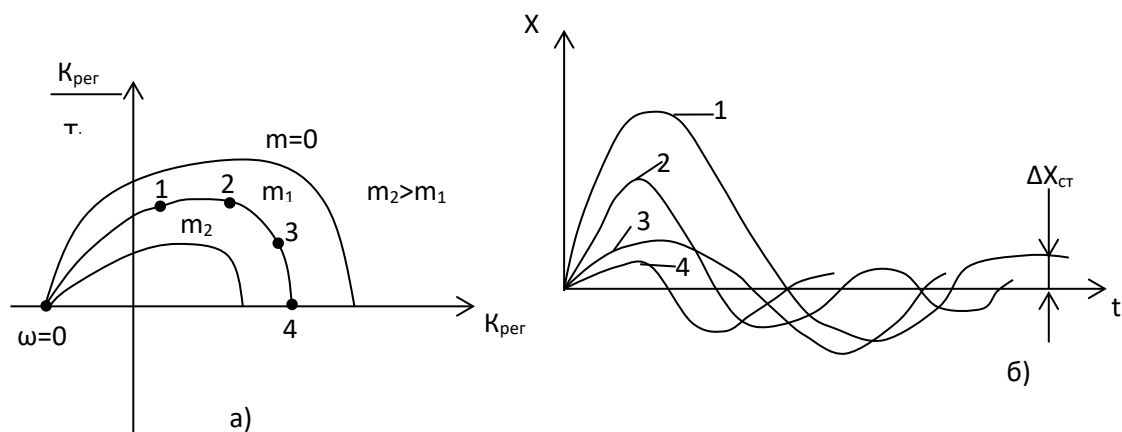


Рис.54. Лінії рівної степені коливальності (а) та перехідні процеси системи (б).

Якщо прийняти $\psi=0,75$, то затухання перехідного процесу недостатнє, а при $\psi=0,9$ можливі значні відхилення регульованої координати. Крім того, якщо змінюються динамічні властивості об'єкта, то необхідно прийняти більший ступінь затухання. На рис.55,б показані перехідні процеси для точок 1-4.

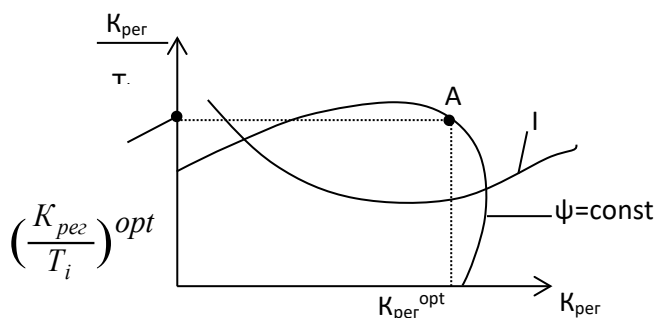


Рис.55. До визначення оптимальних настройок регулятора.

На площині параметрів настройок ПІ-регулятора можна написати значення квадратичного критерія оптимальності. Тоді т.А буде відповідати оптимальним настройкам, для яких $I \rightarrow \min$. Значення параметрів настройок правіше т.А приводить до перехідних процесів, в яких затягується кінцева частота, тому значення критерія I знову зростає.

При аналізі кривих (рис. 55) необхідно звернути увагу на такі обставини :

- зліва від т.А розташована низькочастотна область, зправа – високочастотна. Високочастотна частина кривої рівного ступеню затухання розташована майже вертикально, тому поблизу оптимальної точки А ступінь затухання більше визначається значеннями K_{per} і мало залежить від T_i ;
- поблизу т.4 (рис.55,а) появляється аперіодична складова, процес затягується, що само по собі означає знаходження точки настройки на високочастотній частині лінії;

- для перехідних процесів, які відповідають високочастотній частині лінії характерним є те, що вони мало відрізняються динамічною похибкою, а значення критерія I залежить, в основному, від розмірів аперіодичної складової. Таким чином, якщо рухатись догори, то оптимум буде тоді, коли пропаде аперіодична складова, або вона буде незначною; значення T_i^{opt} залишається майже постійним при різних значеннях ψ ;
- для реальних систем оптимальні настройки відповідають не точці А а області навколо неї;
- значення T_i можна вважати оптимальним, коли пропадає аперіодична складова перехідного процесу;
- значення $K_{рег}$ є оптимальним, коли забезпечується задане значення ψ при T_i^{opt} ;
- значення настройок зліва від т.А погіршують якість перехідних процесів.

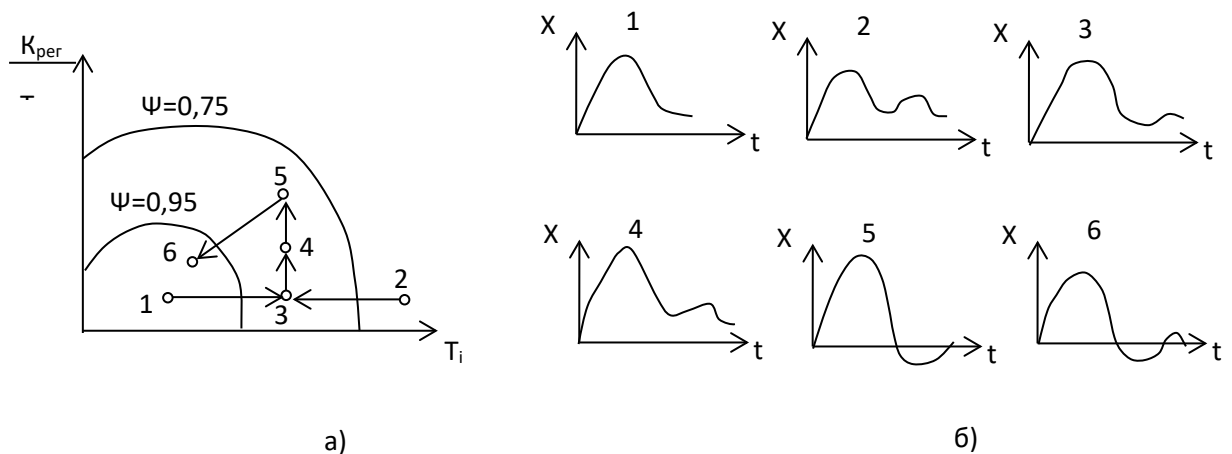


Рис.56. Ілюстрація алгоритму покрокової оптимізації, а – криві рівного ступеню затухання, б – перехідні процеси.

Процес пошуку точки оптимальних настройок можна алгоритмізувати. Алгоритм покрокової оптимізації включає такі етапи:

- з початкових точок 1 або 2 (рис. 56) здійснюється вихід на високочастотну частину лінії рівного ступеню затухання, для чого приймається явно завищені значення T_i та довільне значення $K_{рег}$. Ці настройки можуть потрапити в зону аперіодичності (т.1 і відповідний перехідний процес 1) або значної коливальності (т.2, 2). Далі при $T_i = \text{const}$, змінюючи $K_{рег}$, добиваються, щоб перехідний процес мав коливальну складову (т.3, 3) при $\psi = 0,75 \div 0,9$;
- при $K_{рег} = \text{const}$ зменшенням T_i добиваються, щоб повністю зникла аперіодична складова (точки 4,5 та перехідні процеси 4,5). При наближенні до т.5 необхідно зменшити крок змінювання $K_{рег}$;

- зміною $K_{рег}$ при $T_i = T_i^{opt}$ добиваються потрібного ступеню коливальності (т.6,6).

Розроблено також наближені методи розрахунку настройок регуляторів, які дають перші оцінки цих параметрів. Часто динамічні властивості об'єкта можна подати у вигляді послідовного з'єднання двох елементарних ланок : аперіодичної та запізнювання. Тоді передаточна функція буде :

$$W_{ок}(p) = \frac{K_{ок}}{Tp+1} \cdot e^{-p\tau_{zn}}$$

де : $K_{ок}$, T , τ_{zn} – відповідно коефіцієнт передачі об'єкта по каналу керування, постійна часу та час запізнювання можуть визначатись експериментально. Для прикладу в табл.2 наведені наближені формули розрахунку параметрів настройок регуляторів.

Таблица 2

Наближені формули для розрахунку параметрів настройок регуляторів

Регулятор	Типовий перехідний процес		
	Аперіодичний	З 20 - % перерегулюванням	Min $\int x^2 dt$
П	$K_{рег} = \frac{0,3}{K_{ок} \frac{\tau_{zn}}{T}}$	$K_{рег} = \frac{0,7}{K_{ок} \frac{\tau_{zn}}{T}}$	$K_{рег} = \frac{0,9}{K_{ок} \frac{\tau_{zn}}{T}}$
ПІ	$K_{рег} = \frac{0,6}{K_{ок} \frac{\tau_{zn}}{T}}$ $T_i = 0,6T$	$K_{рег} = \frac{0,7}{K_{ок} \frac{\tau_{zn}}{T}}$ $T_i = 0,7T$	$K_{рег} = \frac{1,0}{K_{ок} \frac{\tau_{zn}}{T}}$ $T_i = T$
ПІД	$K_{рег} = \frac{0,95}{K_{ок} \frac{\tau_{zn}}{T}}$ $T_i = 2,4\tau_{zn}$ $T_d = 0,4\tau_{zn}$	$K_{рег} = \frac{1,2}{K_{ок} \frac{\tau_{zn}}{T}}$ $T_i = 2,0\tau_{zn}$ $T_d = 0,4\tau_{zn}$	$K_{рег} = \frac{1,4}{K_{ок} \frac{\tau_{zn}}{T}}$ $T_i = 1,3\tau_{zn}$ $T_d = 0,5\tau_{zn}$

Другим наближеним методом розрахунку параметрів настройок регуляторів є метод *незагасаючих* коливань (в технічній літературі його називають методом Ціглера-Нікольса). Замкнену систему автоматичного регулювання з П-регулятором переводять в режим автоколивань за допомогою збільшення $K_{\text{рег}}$. Якщо в системі працює ПІ-регулятор, то $T_i \rightarrow \infty$, при ПД-регуляторі $T_i \rightarrow \infty$, $T_d \rightarrow 0$. Для отримання автоколивань визначають критичні значення $K_{\text{рег}}^{\text{крит}}$ і період $T_{\text{п}}^{\text{крит}}$. Тоді наближеними параметрами настройки будуть :

П-регулятор : $K_{\text{рег}} = 0,55 K_{\text{рег}}^{\text{крит}}$

ПІ-регулятор : $K_{\text{рег}} = 0,35 K_{\text{рег}}^{\text{крит}}$; $T_i = 1,25 T_{\text{п}}$

Зменшення коефіцієнта передачі регулятора дозволяє забезпечити необхідний запас стійкості, хоча в цілому отримані настройки не гарантують досягнення екстремуму показника якості, наприклад, інтегрального критерію.

В процесі налагодження АСР наближені параметри настройок уточнюються.

Контрольні запитання.

1. Як формуються задачі аналізу та синтезу систем керування?
2. Назвіть етапи синтезу АСР.
3. Що таке ідеальна структура АСР?
4. Як використовуються передаточні функції об'єкта в задачах аналізу та синтезу?
5. Наведіть алгоритмічні структури ідеальних замкнених та розімкнених АСР.
6. Наведіть приклади часових методів аналізу та синтезу АСР.
7. В чому полягають особливості частотних методів аналізу та синтезу АСР?
8. Як використовуються частотні характеристики замкнених та розімкнених АСР?
9. Чому для систем з ПІ-регулятором існує сімейство частотних характеристик $W_{\text{роз}}(j\omega)$?
10. Як будуються частотні характеристики замкнених АСР?
11. Як визначається область стійкості АСР з ПІ-регулятором?
12. Як визначаються параметри системи на межі стійкості?
13. Як визначаються параметри системи, що гарантують заданий запас стійкості?
14. Які параметри системи називають оптимальними?
15. Чому в системі з ПІ-регулятором відношення $K_{\text{рег}}/T_i$ повинно бути максимальним?
16. Що таке розширені частотні характеристики?

18. 17. Як використовуються розширені частотні характеристики для синтезу АСР?
19. В чому полягає зміст основних задач аналізу та синтезу автоматичних систем?
20. Назвіть основні положення формалізованого опису елементів і систем.
21. Чим характеризуються статичні та динамічні режими роботи?
22. В чому полягає лінеаризація нелінійних характеристик і які методи для цього використовуються?
23. Які типові сигнали використовуються при дослідженні автоматичних систем?
24. Які види динамічних характеристик елементів і систем використовуються в задачах аналізу і синтезу?
25. Наведіть форми запису диференціальних рівнянь системи. Що таке канонічна форма?
26. Які перехідні процеси виникають в АСР?
27. Дайте визначення передаточної функції, як її отримати з диференціального рівняння?
28. Частотні характеристики, їх види, методи отримання.
29. Що таке логарифмічні частотні характеристики?
30. Часові характеристики, їх види та способи отримання.
31. Що таке типові елементарні ланки?
32. Охарактеризуйте властивості елементарних ланок: підсилювальної, аперіодичної, коливальної, диференціювальної, інтегрувальної, із запізненням.
- 33.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ладанюк А.П. Теорія автоматичного керування: курс лекцій (частина перша) – К.: НУХТ, 2004. 124 с.
2. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування: Підручник. – К.: Либідь, 1997. 544 с.
3. Александров Є.Є., Козлов Е.П., Кузнецов Б.І. Автоматичне керування рухомими об'єктами і технологічними процесами. Том. І. Теорія автоматичного керування. – Харків: НТУ "ХПІ", 2002. – 490 с.
4. Александров Є.Є., Голуб О.П., Костенко Ю.Т., Кузнецов Б.І., Соляник В.П. Теорія автоматичного керування. В 3-х томах. – Харків, НТУ "ХПІ", 2001. – 460 с.
5. Основи автоматики і танкові автоматичні системи / Є.Є. Александров, І.В. Костяник, О.Я. Ніконов / Під ред. Є.Є. Александрова. – Харків: НТУ «ХПІ», 2002. – 163 с.
6. Герасимyak Р.П. Теорія автоматичного керування. Збірник задач: Навчальний посібник. – О.: Наука і техніка, 2003. – 108с.