

Криворізький національний університет
Кафедра електричної інженерії

БЕРІДЗЕ Т. М.

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО САМОСТІЙНОГО ВИВЧЕННЯ
ТА ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАВДАНЬ З ДИСЦИПЛІНИ
ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ**

Кривий Ріг

2023

Методичні вказівки до самостійного вивчення та виконання практичних завдань з дисципліни «Теорія автоматичного керування» розроблено згідно ОПП першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» галузі знань 14 «Електрична інженерія» кваліфікація: бакалавр з електроенергетики, електротехніки та електромеханіки 2023 р.

Розробник:

Тетяна Берідзе – докт. екон. наук, професор кафедри електричної інженерії

Рецензент:

Юрій Осадчук – канд. техн. наук, доцент кафедри електричної інженерії

Робоча програма затверджена на засіданні кафедри електричної інженерії
Протокол № 1 від 1 вересня 2023 року

Завідувач кафедри _____ (Олег Сінчук)

ГАРАНТ

Ігор Пересунько - канд. техн. наук, доцент кафедри електричної інженерії

ЗМІСТ

	стор
ВСТУП.....	3
1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ ТЕОРІЇ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ.....	5
2. ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТА ЗАГАЛЬНІ АНАЛІТИЧНІ ЗАЛЕЖНОСТІ У СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ.....	11
3. ПРИКЛАДИ РІШЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАВДАНЬ.....	45
ЛІТЕРАТУРА.....	88

ВСТУП

Сучасні системи керування мають складну багаторівневу (ієрархічну) структуру, в якій використовуються обчислювальні мережі різного рівня на основі ЕОМ та мікропроцесорних засобів. Для складних технологічних об'єктів розробляються системи керування, які також мають достатньо складну структуру і розвинені зв'язки між окремими частинами (елементами). Теорія автоматичного керування виявляє загальні закономірності функціонування, які притаманні автоматичним системам різної природи, і на основі цього розробляє принципи побудови ефективних систем для керування об'єктами різного призначення. При вивченні процесів керування в теорії автоматичного керування абстрагуються від фізичних та конструктивних особливостей систем і замість реальних систем розглядаються їх адекватні математичні моделі. За допомогою цих моделей розв'язуються основні задачі – аналізу та синтезу автоматичних систем. Тому підготовка спеціалістів з високим рівнем теоретичних знань і практичних навичок спонукає до необхідності вивчення сучасними студентами дисципліни «Теорія автоматичного керування».

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ ТЕОРІЇ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

1.1 Історія розвитку автоматичного керування

Завдання автоматизації полягає у здійсненні автоматичного керування різними технічними процесами. Незалежно від видів технологічних або виробничих процесів необхідно раціональне і правильне керування ними, основу якого складають закони кібернетики.

Поняття «автоматизація» є одним із ключових у теорії автоматичного керування і походить від грецького слова «автоматос», що означає «саморушійний». Перші відомості про автомати зустрічалися в роботах Герона Олександрійського, де описані пневмо-автомати для відчинення дверей храму, водяний орган, прилад для вимірювання протяжності доріг, механічний театр маріонеток, але всі ці пристрої не знайшли промислового застосування в ту епоху. У середні віки розвивається «андроїдна автоматика» - поява автоматів, що наслідують

окремим процесам людини. У XVIII столітті "Театр автоматів" був створений російським механіком І.П. Кулібіним. У XVIII-XIX ст. починається новий етап розвитку автоматики, обумовлений промисловим переворотом в Європі, що сприяє появі таких автоматичних пристроїв як регулятор рівня котла парової машини І.І. Повзунова, регулятор рівня котла парової машини Уатта, система програмного керування від перфострічки ткацьким верстатом Жаккарда.

Новий етап автоматики зіграв величезну роль у техніці, ознаменувався розвитком саме теоретичних основ теорії регулювання,

виділенням в окремий науковий напрямок теорії автоматичного керування. Паралельно розроблялися методи аналізу та розрахунку автоматичних пристроїв у електротехніці.

Значний поштовх розвитку теорії та практики автоматичного керування дала Друга світова війна, коли виникла потреба в створенні автопілотів, систем гарматного наведення, станцій радарного стеження. Складність систем військового призначення та очікувані результати від їх застосування дозволили розширити коло технічних засобів та загострили інтерес до систем керування та розробки нових методів їх синтезу та аналізу. Формування теорії автоматичного керування в самостійну наукову та навчальну дисципліну відбулося в період з 1940 по 1950 роки. У цей час були видані перші монографії та підручники, в яких автоматичні пристрої різної фізичної природи розглядалися єдиними методами. У 70-х роках була розроблена теорія оптимального керування, пильну увагу було прикуто до робастних систем керування, при цьому паралельне вдосконалення елементної бази обчислювальної техніки сприяє розвитку методів чисельного аналізу та синтезу систем керування. В електроенергетиці знаходять практичне застосування всі новітні досягнення в техніці керування.

На сучасному етапі розвитку суспільства підвищився інтерес до застосування принципів автоматичного регулювання до керування товарно-матеріальними запасами, сільськогосподарським виробництвом, вітроенергетичними та сонячними установками, процесами біомедицини, діагностики, протезування, соціальної, економічної, політичної сфер.

В даний час теорія автоматичного керування поряд з новітніми розділами, так званої, загальної теорії керування (дослідження операцій, системотехніка, теорія ігор, теорія масового обслуговування) відіграє важливу роль у вдосконаленні та автоматизації керування виробництвом.

1.2 Цілі та завдання теорії автоматичного керування

Теорія автоматичного керування (ТАК) вивчає методи математичного моделювання, аналізу та синтезу систем автоматичного керування.

ТАК - сукупність знань, що дозволяють створювати та вводити в дію автоматичні системи керування технологічними процесами із заданими характеристиками.

Об'єкт вивчення ТАК – система автоматичного керування (САК).

Предмет вивчення ТАК – процеси, що існують у САК.

Мета вивчення ТАК – облік набутих знань у практичній діяльності при проектуванні, виробництві, монтажі, налагодженні та експлуатації САК

Керування – це сукупність операцій, необхідні пуску, зупинки процесу, і навіть підтримки чи зміни у необхідному напрямі величин, що характеризують процес [1].

Мета керування – досягнення значень, співвідношень значень координат процесів у об'єкті керування чи його змін у часі, у яких забезпечується досягнення бажаних результатів функціонування об'єкта.

Об'єкт керування (ОУ) – це технічний пристрій, у якому протікає керований процес.

Пристрій керування (ПУ) - пристрій, що здійснює відповідно до алгоритму керуючий вплив на об'єкт керування.

Поведінка об'єкта керування, результат його функціонування визначається деякими показниками, яким найчастіше є значення фізичних (або іншої природи) величин, що називаються вихідними величинами.

Алгоритм функціонування об'єкта керування – залежність керованої величини від керуючого та основного впливу, що збурює.

У реальних умовах на кожен об'єкт керування численний вплив надає навколишнє (зовнішнє) середовище. З усієї безлічі впливів у полі зору залишають лише ті, які надають найбільший вплив на вихідні величини, і називають їх вхідними впливами.

Вхідні впливи, з погляду їхнього впливу на ОУ, поділяються на дві принципово відмінні групи. Деякі з них забезпечують бажану зміну поведінки об'єкта, досягнення поставлених цілей. Такі вхідні впливи називаються керуючими, за їх відсутності завдання керування взагалі не відбувається.

Зокрема, вплив, що надходить на вхід об'єкта керування і містить інформацію про необхідне значення вихідної величини, називається задаючим впливом.

Інші вхідні дії заважають досягненню мети керування називаються обурюючі або перешкодами. Схематично особливості об'єкта керування показані малюнку 1.2.

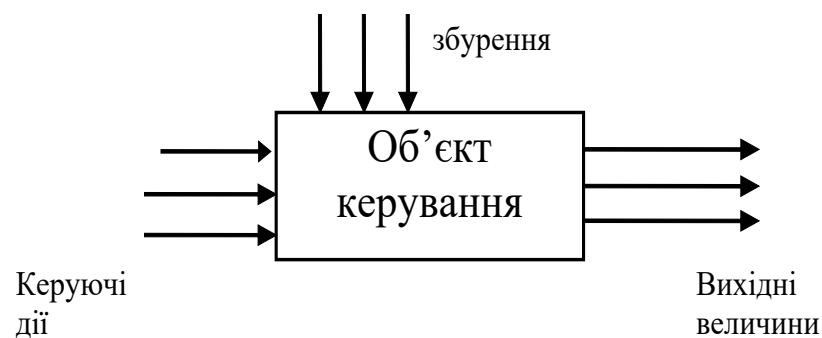


Рисунок 1.2 – Характеристики об'єкта керування

Алгоритм керування (алгоритм функціонування керуючого пристрою) - залежність керуючого впливу від впливу, що управляє, керованої величини і додаткового збурюючого впливу.

САК - це сукупність об'єкта керування та керуючого пристрою.

Алгоритм керування - сукупність розпоряджень, що визначає характер впливів ззовні на об'єкт керування, що забезпечують його алгоритм функціонування.

Регулювання – окремий випадок керування, у якому необхідний перебіг процесу створюється шляхом стабілізації однієї чи кількох параметрів у межах заданих значень [2].

Автоматичне регулювання – це автоматична підтримка заданого закону зміни показників процесів за рахунок зворотного зв'язку.

Регульований об'єкт – об'єкт, керований автоматичним регулятором.

Автоматичний регулятор – автоматичний пристрій, призначений для автоматичного підтримання постійного значення регульованих параметрів у різноманітних об'єктах або змінюваних регульованих параметрів за будь-яким потрібним законом.

Система автоматичного регулювання (САР) – сукупність регульованого об'єкта та автоматичного регулятора.

Завдання керування полягає у формуванні такого закону зміни керуючих впливів, у яких досягається бажане поведінка об'єкта незалежно від наявності збурень.

Перед ТАК ставляться завдання розробки методів синтезу, аналізу та корекції, експериментального дослідження та налагодження САК. За допомогою методів синтезу можна здійснювати вибір схеми взаємодії елементів САК, параметрів та характеристик цих елементів таким чином, щоб система загалом задовольняла заданим вимогам до її поведінки в статичності та динаміці. Методи аналізу дозволяють визначити якісні показники САК, а у разі їхньої відмінності від заданих – намітити шляхи покращення статичних та динамічних властивостей системи. Зміна статичних та динамічних властивостей здійснюється за допомогою корекції. Методи експериментального дослідження та налагодження САК дають можливість раціонально та оптимально дослідити умови роботи [3].

В даний час розробка та проектування САК є досить складним завданням, рішення якої може бути досягнуто різними шляхами. Щоб спроектувати САК, що задовольняє всім вимогам технічного завдання, зазвичай доводиться прораховувати і порівнювати між собою кілька варіантів поелементної та принципової схем. Багатозначність рішення робить проектування САК творчим цікавим завданням, складність розв'язання якої значною мірою залежить від виду диференціальних рівнянь, що описують статичні та динамічні характеристики САК. Сучасний рівень розвитку математики часто виявляється недостатнім для вирішення окремих завдань теорії математичного регулювання і тоді на допомогу проектувальникам приходять експериментальне дослідження та моделювання, які полегшують розрахунки та сприяють створенню наближених методів вирішення задач.

1.3 Класифікація систем автоматичного керування

Класифікація САК може бути здійснена за різними принципами та ознаками, що характеризують призначення та конструкцію систем, вид застосовуваної енергії, використовувані алгоритми керування та функціонування тощо. Можна виділити ряд ознак, що визначають класи САК, як представлено в таблиці 1.1, проте варто зазначити, що цей варіант класифікації не є вичерпним.

Розглянемо докладніше системи, у яких застосований різний принцип керування. У розімкнених системах відсутній зворотний зв'язок між виходом об'єкта керування та входом керуючого пристрою.

Зворотний зв'язок – це процес, що призводить до того, що результат функціонування будь-якої системи впливає параметри, яких залежить функціонування цієї системи. Інакше кажучи, на вхід системи подається сигнал, пропорційний її вихідному сигналу (чи, у випадку, є функцією цього сигналу). Часто це робиться навмисно, щоб вплинути динаміку функціонування системи.

Розрізняють позитивний та негативний зворотний зв'язок.

Негативний зворотний зв'язок змінює вхідний сигнал таким чином, щоб протидіяти зміні вихідного сигналу. Це робить систему стійкішою до випадкової зміни параметрів.

Таблиця 1- Класифікація САК

Ознака класифікації	Клас САК
принцип керування	розімкнені
	замкнуті
ціль керування	комбіновані
	системи програмного керування

	стежать системи адаптивні (самоналаштовуються)
кількість регульованих величин	одновимірні многовимірні
характер сигналів у пристрої керування	неперервні (аналогові) гармонічним модульованим сигналом дискретні імпульсні, цифрові
характер параметрів	стаціонарні нестационарні розподіленими параметрами
ідеалізація математичного опису	лінійні нелінійні
вид математичних рівнянь	стаціонарні нестационарні
характер процесів	стохастичні детерміновані
належність джерела енергії, що створює керуючий	вплив прямої дії непрямої дії
характер залежності керованої величини від статичного обурення	статичні астатичні
число контурів	одноконтурні багатоконтурні
спосіб вироблення керуючих впливів	безпошукові пошукові
критерій якості	із заданою якістю оптимальні адаптивні

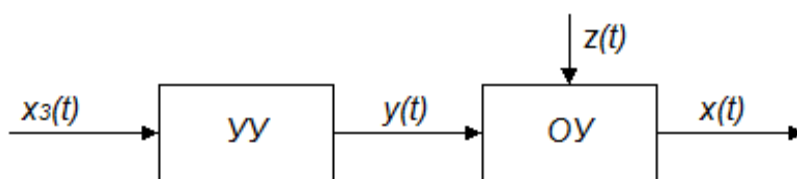
Позитивний зворотний зв'язок, навпаки, посилює зміну вихідного сигналу. Системи з сильною позитивною зворотним зв'язком виявляють тенденцію до нестійкості, вони можуть виникати незагасаючі коливання, тобто. система стає генератором.

Розімкнена САК – система, у якій здійснюється контроль керованої величини, тобто. вхідними впливами її керуючого пристрою є лише зовнішні (що задає та обурює) впливу.

Алгоритм керування розімкнутої системи першого типу має вигляд $y(t) = A_y[x_3(t)]$. Найчастіше оператор A_y встановлює пропорційний зв'язок між впливом $x_3(t)$ і керуючим впливом $y(t)$.

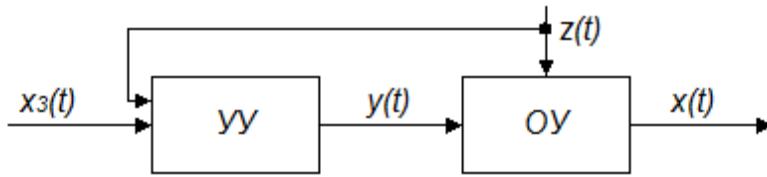
Розімкнуті САК можна розділити на два типи:

- здійснюють керування відповідно до зміни лише впливу, що задає (малюнок 1.4);
- здійснюють керування відповідно до зміни та впливу, що задає і обурює (малюнок 1.5).



Малюнок 1.4 – Схема САК з розімкнутим ланцюгом впливу, що задає

Системи першого типу працюють з достатньою ефективністю лише за умови, якщо вплив збурень на керовану величину невеликий і всі елементи розімкнутого ланцюга мають досить стабільні характеристики.



Малюнок 1.5 – Схема САК з розімкнутим ланцюгом впливу, що задає і обурює.

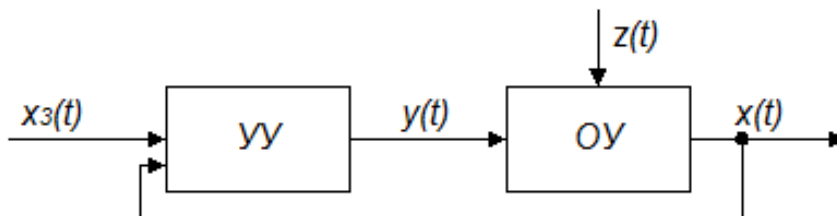
Найчастіше розімкнуті системи керування із збуренням виконують функції стабілізації керованої величини.

Перевага розімкнених систем керування з обурення – їхня швидкодія: вони компенсують вплив обурення ще до того, як воно виявиться на виході об'єкта. Але ці системи застосовні лише в тому випадку, якщо на керовану величину діють одне або два обурення і є можливість вимірювання цих збурень. Тому якщо ці величини діють на об'єкт як обурення, то зазвичай прагнуть стабілізувати їх за допомогою додаткової системи або ввести в основну систему керування даним об'єктом сигнал, пропорційний такої дії.

Замкнена САК (САК із зворотним зв'язком) – система, в якій вхідними впливами її керуючого пристрою є як зовнішнє (що задає), так і внутрішній (контрольний) вплив.

Керуючий вплив у замкнутій системі (рис. 1.6)

формується здебільшого залежно від величини та знаку відхилення істинного значення керованої величини від її заданого значення $y(t) = A_y[\varepsilon(t)]$, где $\varepsilon(t) = x_3(t) - x(t)$ – сигнал помилки (сигнал розузгодження).



Малюнок 1.6 – Схема САК із замкнутим ланцюгом впливу

Замкнену систему називають часто системою керування з відхилення. Варіант зміни САК зі зворотним зв'язком можна представити схемою малюнка 1.7.

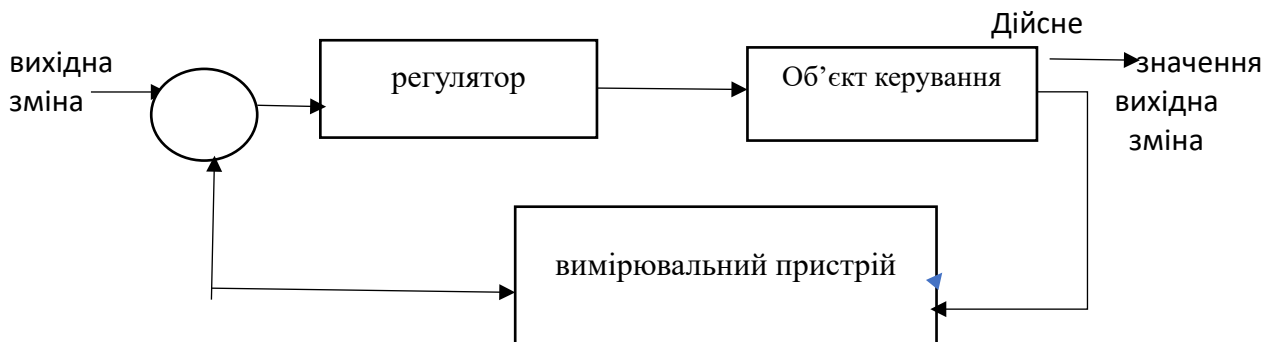
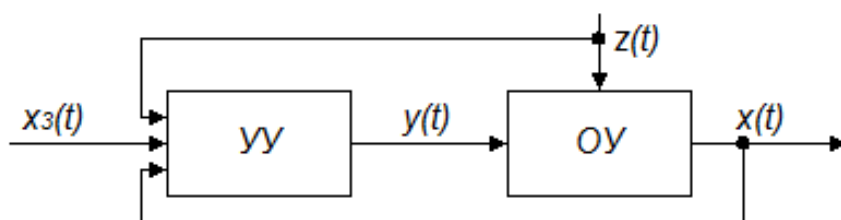


Рисунок 1.7 – Система із зворотним зв'язком

У замкнутій системі контролюється безпосередньо керована величина і тим самим при виробленні керуючого впливу враховується дія всіх збурень, що впливають на керовану величину. У цьому полягає перевага замкнутих систем. Але через наявність замкнутого ланцюга впливів у цих системах можуть виникати коливання, які в деяких випадках роблять систему непрацездатною. Крім того, сам принцип дії замкнутих систем (принцип керування з відхилення) допускає небажані зміни керованої величини: спочатку обурення має проявитися на виході, система "відчує" відхилення і лише потім виробить керуюче вплив, спрямоване на усунення цього відхилення. Така "повільність" знижує ефективність керування. Незважаючи на наявність певних недоліків, цей принцип керування широко застосовується під час створення САК.

Комбінована АСУ (рисунок 1.8) - система, в якій вхідними впливами її керуючого пристрою є як зовнішні (що задає і обурює), так і внутрішні (контрольне) впливу.



Малюнок 1.8 – Схема САК з комбінованими ланцюгами впливу

У комбінованих системах є два ланцюги впливів – за завданням і з обурення, і керуючий вплив формується згідно з оператором $y(t) = A_z[\varepsilon(t)] + A_b[z(t)]$.

Ефективність роботи комбінованої САК завжди більша, ніж у окремих функціонуючих замкнутої або розімкнутої систем.

Слід зазначити, що керування з використанням зворотного зв'язку – це незаперечний факт сучасного повсякденного життя. За принципом зворотного зв'язку побудовані системи керування автомобілями, холодильними установками, духові шафи, електропіч, водяний нагрівач і т.д.

Безпошукова САК - система, в якій керуючий вплив виробляється в результаті порівняння істинного значення керованої величини із заданим значенням.

Такі системи застосовують для керування порівняно нескладними об'єктами, характеристики яких досить добре вивчені і для яких заздалегідь відомо в якому напрямку і на скільки потрібно змінити керуючий вплив при певному відхиленні керованої величини від заданого значення.

Пошукова САК – система, в якій керуючий вплив формується за допомогою пробних керуючих дій та шляхом аналізу результатів цих пробних дій.

Таку процедуру пошуку правильного впливу, що управляє, доводиться застосовувати в тих випадках, коли характеристики об'єкта керування змінюються або відомі не повністю; наприклад, відомий вид залежності керованої величини від впливу, що управляє, але невідомі числові значення параметрів цієї залежності. Тому пошукові системи називають ще системами з неповною інформацією.

Найчастіше принцип автоматичного пошуку управляючих впливів застосовують керувати об'єктами, характеристики яких мають екстремальний характер. Метою керування є відшукування та підтримка керуючих впливів, що відповідають екстремальному значенню керованої величини. Такі пошукові системи називають екстремальними (оптимальними) системами.

Особливий клас САК утворюють системи, які здатні автоматично пристосовуватися до зміни зовнішніх умов та властивостей об'єкта керування, забезпечуючи при цьому необхідну якість керування шляхом зміни структури та параметрів керуючого пристрою. Вони називаються адаптивними системами.

У складі адаптивної САК є додаткове автоматичне пристрій, який змінює алгоритм керування основного керуючого пристрою таким чином, щоб САК в цілому здійснювала заданий алгоритм

функціонування. Алгоритм функціонування адаптивної САК пропонує зазвичай максимізацію показника якості, який характеризує або властивості процесу керування в САК в цілому (швидкість, точність тощо.), або властивості процесів, що протікають в об'єкті керування (продуктивність, досягнення найвищого коефіцієнта корисної дії, мінімізація витрат тощо). Тому адаптивні САК є зазвичай ще й оптимальними.

Наступним важливим критерієм класифікації систем виступає залежність керованої величини в режимі, що встановився від величини збурюючого впливу, за яким САК діляться на статичні та астатичні.

Регулювання називається статичним, якщо встановилося після закінчення перехідного процесу значення регульованої величини при різних постійних значеннях навантаження прийматиме також різні постійні значення, що залежать від навантаження.

Регулятор, який здійснює статичне регулювання, називається статичним регулятором.

У найпростішому випадку, коли переміщення регулюючого органу, що встановилося, під впливом регулятора пропорційного відхилення регульованої величини від її заданого значення, статичний регулятор називається пропорційним регулятором.

Для характеристики ступеня залежності відхилення регульованої величини від навантаження використовується поняття статизму регулювання.

Статичний регулятор підтримує не строго постійне значення регульованої величини, а з помилкою, яка називається статичною помилкою системи.

Статизм регулювання – це відносна статична помилка за зміни навантаження від холостого ходу до номінальної [1].

Якщо при зміні навантаження від нуля до номінального значення в статичній системі значення параметра, що регулюється, змінилося від $x_{\min}$ до $x_{\max}$, то статизмом системи δ називають наступне співвідношення

$$\delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{x_{\max}}$$

У випадках, коли статична помилка є небажаною, переходять до регулюванню астатичному.

Астатичне регулювання - регулювання, при якому в режимі, що встановився, підтримується постійне значення регульованої величини, рівне заданому значенню, незалежно від величини навантаження. Характеристика астатичного регулювання є пряму лінію, паралельну осі навантаження. Помилка, що встановилася при астатичному регулюванні теоретично дорівнює нулю, а практично внаслідок неточності регулятора вона можлива, проте від навантаження залежати не буде. В результаті помилки регульована величина може прийняти будь-яке значення всередині деякої зони допустимих значень.

Для отримання астатичного регулювання потрібно встановити в регуляторі жорстку залежність між положенням регулюючого органу і значенням регульованої величини для того, щоб задане значення регульованої величини можна було підтримувати при будь-якому навантаженні. З цією метою і вводять астатичну ланку.

Слід зазначити, що статичні регулятори мають статичну помилку, астатичні регулятори статичної помилки не мають, але вони більш інерційні, складні конструктивно і дорожчі.

Забезпечення необхідної статичної точності регулювання

є першим основним завданням при розрахунку елементів САК.

САК притаманні статична та динамічна помилки.

Статична помилка – значення різниці, що встановилося, між заданим і кінцевим значеннями керованого параметра при постійному значенні задає або обурює впливу.

Динамічна помилка - значення різниці між заданим і поточним значеннями керованого сигналу.

Розмір помилок керування переважно залежить від структури управляючого устрою, визначального закон керування.

Параметри САК обумовлені властивостями її окремих елементів. Параметри системи можуть бути постійними та змінними. У тому випадку, коли параметри постійні та змінюються за лінійним законом, САК називається лінійною системою, інакше – нелінійною.

1.4 Алгоритми керування

Керуючий пристрій складається з різних елементів, але при розробці та дослідженні алгоритмів керування зазвичай виконавчий пристрій та інші елементи, що володіють інерційністю, об'єднують з об'єктом керування (рисунок 1.7) і тоді під регулятором (керуючим пристроєм) розуміють перетворююче об'єкт керування, що формує на підставі помилки ε [Кім].

Функціональна залежність $y_0 = f(\varepsilon)$, що визначає зв'язок між бажаним впливом регулятора на регулюючий орган (y_0) та величиною відхилення ε називається алгоритмом регулятора (законом регулювання).

В даний час застосовують три основні принципи регулювання:

- а) принцип регулювання щодо відхилення;
- б) принцип регулювання навантаження (з обурення);
- в) комбінований принцип.

У промислових регуляторах застосовують такі типові закони керування:

- а) пропорційний закон (П-регулятор), який визначається залежністю $y_0 = k_P \varepsilon$;
- б) пропорційно-інтегральний закон (ПІ-регулятор), визначений залежністю;

$$y_0 = k_P \varepsilon + k_I \int_0^t \varepsilon(t) dt$$

- в) пропорційно-диференціальний закон (ПД-регулятор), що визначається залежністю;

$$y_0 = k_P \varepsilon + k_D \frac{d\varepsilon}{dt}$$

- г) пропорційно-інтегро-диференціальний (ПІД-регулятор), що визначається залежністю

$$y_0 = k_P \varepsilon + k_I \int_0^t \varepsilon(t) dt + k_D \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

У висловлюваннях законів кП, кІ, кД – передавальні коефіцієнти, вибір яких і рівень впливу на керований процес реалізуються у процесі синтезу алгоритмів керування.

Завдання синтезу і проектування САК полягає в такому виборі її структурної схеми, параметрів, характеристик і способу їх технічної реалізації, при яких необхідні динамічні та експлуатаційні властивості системи забезпечуються простими і надійними технічними засобами.

З погляду ТАК метою синтезу є формування закону керування, при якому досягаються задані показники стійкості та якості системи.

Контрольні питання

1. Яка роль автоматизації у покращенні якості продукції, підвищенні ефективності виробництва та прискоренні технічного прогресу?
2. Що називається керуванням?
3. Що називається автоматичним керуванням?
4. Що називається системою автоматичного керування?
5. Що є основним завданням автоматичного керування?
6. Що є метою автоматичного керування?
7. Що називається об'єктом керування?
8. Що називається керованою величиною?
9. Що називається керуючим органом?
10. Що називається чутливим елементом?
11. Що таке вхідна та вихідна величини?
12. Що називається керуючим впливом?

13. Що називається обуренням?
14. Що називається відхиленням від заданої величини?
15. Що називається керуючим пристроєм?
16. Що називається пристроєм, що задає?
17. Як називається система, що складається з об'єкта, що управляє, і об'єкта керування?
18. Дати визначення регулятора?
19. Як називається координата, значення якої залежить від керуючих впливів і показують ступінь досягнення мети керування?
20. Охарактеризувати зворотний зв'язок, що діє в перехідному режимі зміни стану об'єкта керування у бік зменшення відхилень поточних значень координат об'єкта від їх попередніх значень.
21. Як називається вплив, що додається до входу системи керування?
22. Як називається вплив, що впливає об'єкт керування у час?
23. Як називається сукупність показників керування, прийнята з метою оцінки його корисності?
24. Вкажіть керування, що є поєднанням управліннь за відхиленнями і з обуреннями?
25. Як називається керування, у якому управляючий вплив представляється як дискретних безперервних впливів?
26. Як називається система керування, у якої в режимі немає помилки у відпрацюванні управляючого впливу?
27. Як називається зворотний зв'язок, що діє лише у перехідному режимі зміни стану об'єкта керування у бік зменшення відхилень поточних значень координат об'єкта від попередніх значень?
28. Як називається вплив із виходу системи керування?
29. Як називається система керування, в якій здійснено керування без зворотного зв'язку?
30. Як називається об'єкт керування, у математичній моделі функціонування якої кожна керована координата залежить лише від однієї відповідної їй керуючої координати?
31. У чому суть принципу розімкнутого керування?
32. У чому суть принципу компенсації?
33. У чому суть принципу зворотний зв'язок?
34. Перерахуйте переваги та недоліки принципів керування?
35. Який окремий випадок керування називається регулюванням?
36. У чому відмінність систем прямого та непрямого регулювання?
37. Які основні види САК? Дати їх коротку характеристику.
38. Що називається статичним режимом САК?
39. Що називається статичними характеристиками САК?
40. Що називається рівнянням статички САК?
41. Що називається коефіцієнтом передачі, у чому відмінність від коефіцієнта посилення?
42. У чому відмінність астатичності

2 ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТА ЗАГАЛЬНІ АНАЛІТИЧНІ ЗАЛЕЖНОСТІ У СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

2.1 Структура систем автоматичного керування

Вивчення та математичний аналіз САК істотно полегшуються, якщо її попередньо подумки розчленувати на типові елементи, виявити фізичні взаємозв'язки між ними і відобразити ці взаємозв'язки схематично у будь-якій умовній формі.

САК може бути розділена на частини за різними ознаками:

призначення частин, алгоритмів перетворення інформації, конструктивної відокремленості. Розрізняють такі структури та схеми САК:

- а) функціональну;

- б) технічну;
- в) алгоритмічну;
- г) конструктивну.

Структура – сукупність пов'язаних між собою частин чогось цілого.

Структурна схема – графічне зображення структури.

Теоретично автоматичного керування найчастіше мають справу з функціональною та алгоритмічною структурами (схемами).

Функціональні та алгоритмічні схеми складаються з умовних зображень елементів та ланок (зазвичай у вигляді прямокутників) та різних зв'язків, що зображуються у вигляді ліній зі стрілками, що показують напрям передачі впливів. Кожна лінія відповідає зазвичай одному сигналу або одному впливу. Біля кожної лінії вказують фізичну величину, що характеризує цей вплив.

Технічна структура – структура системи, елементами якої є технічні елементи.

Зазвичай спочатку становлять функціональну схему САК та алгоритмічну. Структурні схеми можуть складатися з більшим або меншим ступенем деталізації. Схеми, у яких показано лише головні чи укрупнені частини САК, називаються узагальненими.

Функціональна структура (схема) - структура (схема), що відображає функції (цільові призначення) окремих частин САК, що розглядається як сукупність функціональних елементів.

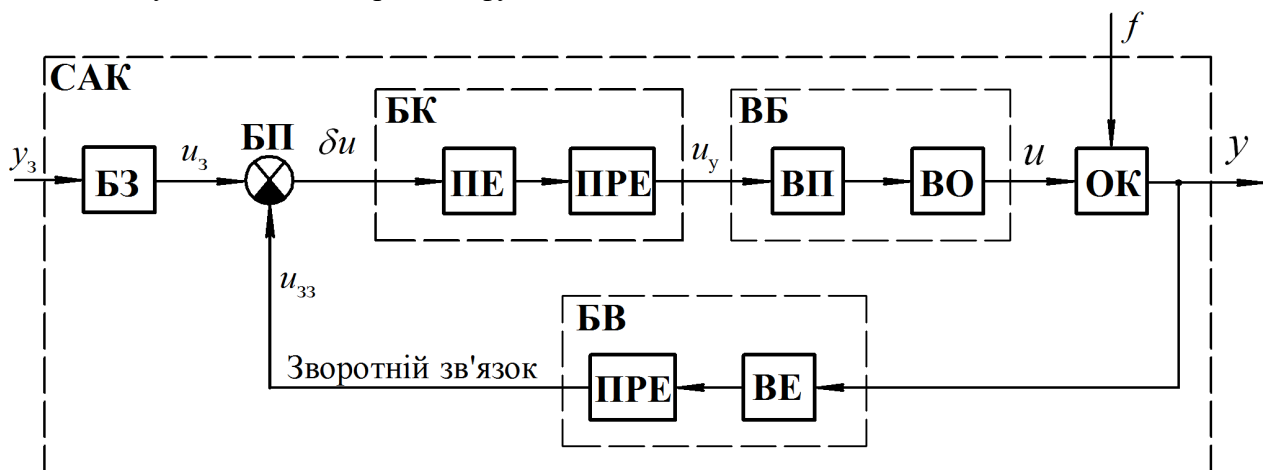
Такими функціями можуть бути такі:

- а) одержання інформації про стан об'єкта керування;
- б) перетворення сигналів;
- в) порівняння сигналів.

Як частини функціональної структури (схеми) САК розглядаються функціональні пристрої. Назви пристроїв вказують на виконання певної функції. Як функціональні пристрої можуть виступати наступні елементи:

- а) датчик;
- б) підсилювач;
- в) блок порівняння;
- г) керуючий блок;
- д) виконавчий устрій тощо.

На малюнку 2.1 наведено приклад функціональної схеми САК,



Малюнок 2.1 – Узагальнена функціональна схема САК

Де БЗ -задаючий блок; БП -

блок виміру БВ; блок порівняння БП; блок керування БК; підсилювальний елемент ПЕ; перетворюючий елемент ПРЕ; вимірювальний елемент ВЕ. виконавчий пристрій ВП;

Алгоритмічна структура (схема) - структура (схема), що представляє собою сукупність взаємопов'язаних алгоритмічних ланок і характеризує алгоритми перетворення інформації в САК.

Алгоритмічна ланка – частина алгоритмічної структури САК, що відповідає певному математичному чи логічному алгоритму перетворення сигналу.

Якщо алгоритмічна ланка виконує одну найпростішу математичну або логічну операцію, то її називають елементарною алгоритмічною ланкою. На схемах алгоритмічні ланки зображують прямокутниками, всередині яких записують відповідні оператори перетворення сигналів.

Іноді замість операторів у

Формальному вигляді наводять графіки залежності вихідної величини від вхідної або графіки перехідних функцій.

Розрізняють такі види алгоритмічних ланок:

- а) статичне;
- б) динамічний;
- г) арифметичне;
- д) логічне.

Статична ланка – ланка, що перетворює вхідний сигнал вихідний миттєво (без інерції).

Зв'язок між вхідним і вихідним сигналами статичної ланки описується зазвичай функцією алгебри. До статичних ланок відносяться різні безінерційні перетворювачі, наприклад, резистивний дільник напруги.

На малюнку 2.2 показано умовне зображення статичної ланки на алгоритмічній схемі.

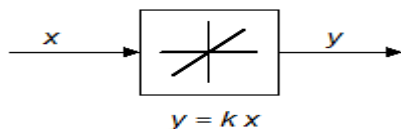


Рисунок 2.2 – Умовне зображення статичної ланки

Динамічне ланка – ланка, що перетворює вхідний сигнал вихідний відповідно до операцій інтегрування та диференціювання у часі.

Умовне зображення динамічної ланки представлено на малюнку 2.3.

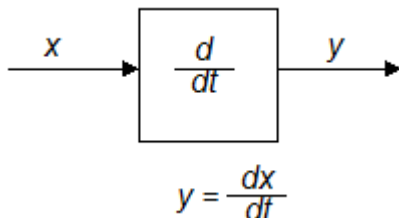


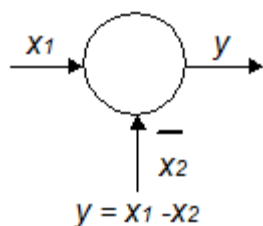
Рисунок 2.3 – Умовне зображення динамічної ланки

Зв'язок між вхідним і вихідним сигналами динамічного звена описується звичайними диференціальними рівняннями.

До класу динамічних ланок відносяться елементи САК, що володіють здатністю накопичувати будь-який вид енергії або речовини наприклад, інтегратор з урахуванням електричного конденсатора.

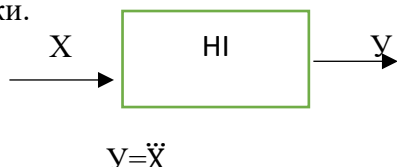
Арифметична ланка - ланка, що здійснює одну з арифметичних операцій: підсумовування, віднімання, множення, розподіл.

Найчастіше зустрічається в автоматичі арифметичне ланка – ланка, що виконує підсумовування алгебри сигналів, називають суматором, умовне позначення якого наведено на малюнку 2.4.



Малюнок 2.4 – Умовне зображення вузла підсумовування

Логічне ланка – ланка, виконує якусь логічну операцію: логічне множення («І»), логічне додавання («АБО»), логічне заперечення («НІ») тощо. На малюнку 2.5 показано умовне позначення логічної ланки.



Малюнок 2.5 – Умовне позначення логічної ланки

Вхідний та вихідний сигнали логічної ланки є зазвичай дискретними і розглядаються як логічні змінні.

Конструктивна структура (схема) - структура (схема), що відображає конкретне схемне, конструктивне виконання САК.

До конструктивних схем належать: кінематичні схем пристроїв, принципові та монтажні схеми електричні з'єднань і т. д. Так як ТАУ має справу з математичними моделями САК, то конструктивні схеми цікавлять значно меншою мірою, ніж функціональні та алгоритмічні.

2.2 Особливості та властивості елементів САК

При взаємодії частин САУ між собою, а також при процесі функціонування самого об'єкта керування здійснюється перетворення енергії одного виду в енергію іншого виду, що обумовлено різною фізичною природою елементів, що входять до складу САК. Так одна і та сама система може включати в себе, наприклад, механічні, електричні та гідравлічні елементи. Але процеси перетворення і перерозподілу енергії в САК, на відміну від багатьох інших фізичних систем, строго орієнтовані, тобто енергія та впливи передаються лише у певному напрямку.

Спрямованість передачі впливів у САК забезпечується завдяки наявності в одного або кількох конструктивних елементів системи так званого детектуючого властивості. Ця властивість полягає в тому, що аналізований елемент не надає зворотного дії на попередній елемент, а його вихідна величина не впливає на свою вхідну. Наприклад, електричний чотириполіусник має односпрямованість передачі впливів, якщо він не навантажує попередній чотириполіусник, тобто якщо вихідний опір попереднього елемента істотно менше вхідного опору аналізованого чотириполіусника.

Зазвичай властивістю односпрямованості мають ті елементи САК, які передають інформаційні дії. До таких елементів відносяться в першу чергу вимірювачі та перетворювачі сигналів.

Конструктивні частини системи, через які передаються енергетичні впливи, цією властивістю, як правило, не мають.

Тільки внаслідок наявності елементів спрямованої дії в САК створюється замкнутий контур передачі дій, за допомогою якого здійснюється цілеспрямований процес керування. Без таких елементів САК були б непрацездатні чи малоефективні.

2.3 Підходи до математичного опису лінійних систем автоматичного керування

Математичний опис, необхідний для дослідження процесу регулювання, здійснюється зазвичай за допомогою диференціальних, інтегральних, різницевих або алгебраїчних рівнянь [1].

Інерційні системи та елементи систем безперервного регулювання описуються зазвичай диференціальними або інтегральними рівняннями, званими рівняннями динаміки.

Оскільки основним режимом роботи САУ вважається динамічний режим, що характеризується перебігом у ній перехідних процесів.

Тому другим основним завданням при розробці САУ є аналіз динамічних режимів роботи САК.

Безінерційні елементи, а також поведінка системи регулювання у встановленому режимі при постійних впливах описуються алгебраїчними рівняннями, званими рівняннями статички.

Якщо параметри системи вважатимуться зосередженими, то рівняння динаміки будуть звичайними диференціальними рівняннями. Системи з розподіленими параметрами описуються диференціальними рівняннями у приватних похідних.

Основним методом дослідження САК у динамічних режимах є метод розв'язання диференціальних рівнянь.

У загальному випадку диференціальні рівняння, що описують поведінку елемента або САУ, є нелінійними, проте при малих Відхилення координат системи від положення рівноваги нелінійні рівняння можна приблизно замінити лінійними рівняннями.

Лінеаризація - процес заміни нелінійного рівняння лінійним.

Дослідження лінійних рівнянь дозволяє зробити узагальнюючі висновки про систему. Для отримання математичного опису системи складаються спочатку диференціальні рівняння окремих ланок, та був виходячи з цих рівнянь – диференціальні рівняння САК загалом. У цьому рівняння елемента складається виходячи з того фізичного закону, який визначає процес, що відбувається в даному елементі, а замі проводиться його лінеаризація.

2.3.1 Рівняння ідеалізованої машини-двигуна

Об'єктами або виконавчими елементами в багатьох САК є двигуни з обертовим ротором [1].

Якщо з валом двигуна пов'язаний механізм з рухомими деталями, то наведений до валу двигуна момент інерції частин, що рухаються, може і не бути постійним (залежить від кута повороту вала двигуна). У багатьох випадках періодична зміна з малою амплітудою моменту інерції можуть не враховуватися, тобто момент інерції приймається постійним, рівним середньому за період. Цей варіант ідеалізації цілком виправданий, якщо прийняти, що час одного обороту машини мало в порівнянні з часом процесу регулювання (для парових машин з масивними поршнями і для дизелів результати цілком задовільні).

Для багатьох машин-двигунів характерна наявність одного ступеня свобод, тобто однієї узагальненої координати, завдання якої в даний момент або як функція часу повністю визначає стан машини. Для машин, що розглядаються, як узагальнена координата, завдання якої у цей момент або як функції часу повністю визначає стан машини. Для аналізованих машин як узагальненої координати приймають або швидкість обертання валу, чи кутове положення валу, залежно від цього, яка з цих координат істотна.

Якщо прийняти за координату швидкість, то рівняння руху машини буде рівняння: д'Аламбера:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_D - M_C,$$

де J - момент інерції рухомих частин, наведений до валу машини;

ω – кутова швидкість обертання валу машини (узагальнена координата);

M_d – рушійний момент на валу машини;

M_c – момент опору (навантаження), наведений до валу машини.

Рушійний момент M_d повинен залежати від положення регулюючого органу z . Ця умова визначає можливість регулювання машини. Але, крім цього, рушійний момент може залежати і від інших змінних, наприклад, від швидкості обертання вала.

Момент опору M_c можна розбити на кілька складових, одні з яких мають постійну величину, а інші можуть залежати або від кута повороту ротора, або від часу, або від швидкості, отже, рівняння двигуна набуває вигляду:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_d(z, \omega) - M_{c.n.} - M_c(\omega) - M_c(t)$$

У загальному випадку рівняння нелінійне, оскільки функції $M_d(z, \omega)$ та $M_c(\omega)$ можуть бути нелінійними функціями z та ω . Ці функції можуть бути задані аналітично, графічно або у вигляді таблиць. Функція $M_c(t)$, що є зміною навантаження на двигун, зазвичай заздалегідь невідома. Щоб розв'язання завдання було можливим, воно має бути задане згідно з реальними умовами. Якщо умови різноманітні необхідно вибирати важкі (раптовий накид або скидання навантаження), так як якщо регулятор добре виконує своє завдання при раптовому зміні навантаження, то при плавних її змін він буде відпрацьовувати сигнал ще краще.

Приймається, що $M_c(t)$ змінюється стрибком і після стрибка зберігає постійне значення:

$$M_c(t) \begin{cases} 0, \text{ якщо } t \leq 0, \\ \text{const}, \text{ якщо } t \geq 0. \end{cases}$$

Наступним етапом є лінеаризація розглянутого рівняння, яка може бути виконана аналітично за допомогою ряду Тейлора (при цьому всі нелінійні члени розкладання відкидаються) або графічно.

Враховуючи рівняння статичної машини в режимі:

$$M_{d0} - M_{c0} = 0,$$

приймаючи за змінні не абсолютні значення, які прирости:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d(\omega - \omega_0)}{dt} = \frac{d\Delta\omega}{dt}$$

введемо безрозмірні позначення:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_n} = \phi$$

$$\frac{\Delta x}{x_n} = \mu$$

де ω_n – номінальна кутова швидкість валу машини;

x_n – повний хід регулюючого органу.

Приймаємо позначення

$$T_1 = \frac{J\omega_n}{x_n \left(\frac{\partial M_d}{\partial x} \right)_{x=x_0, \omega=\omega_0}},$$

$$k_1 = \frac{\omega_n \left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega} - \frac{\partial M_d}{\partial \omega} \right)}{x_n \left(\frac{\partial M_d}{\partial x} \right)_{x=x_0, \omega=\omega_0}}$$

і наводимо вихідне рівняння до форми:

$$T_1 \dot{\varphi} + k_1 \varphi = \mu.$$

Якщо прийняти $T = T_1/k_1$ і $k = 1/k_1$, то рівняння можна записати в стандартній операторній формі (p - оператор Лапласа):

$$(Tp+1) \varphi = k\mu.$$

Таким чином, отримано рівняння руху одного з елементів системи регулювання. Допущені спрощення дозволяють написати рівняння машини у досить простій формі.

2.3.2 Рівняння електричного двигуна постійного струму

Значна кількість елементів системи регулювання описується дуже складними залежностями і тому такі пристрої неможливо уявити у вигляді однієї елементарної ланки.

Прикладом такого елемента є двигун постійного струму із незалежним збудженням. Для цього об'єкта рівняння руху системи може бути записано таким чином:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_D - M_C$$

Двигун МД електричного двигуна може бути визначений

$$M_D = k\Phi I_a,$$

де k – постійна машини (визначається за характеристиками чи за паспортом машини);

I_a - струм якоря двигуна;

Φ – магнітний потік обмотки збудження.

Тоді вихідний вираз можна записати так

$$J \frac{d\omega}{dt} = k\Phi I_a - M_C$$

де M_C - момент сил опору (приймається величиною постійної).

Як видно, до рівнянь входять три незалежні змінні (ω , I_a , Φ), отже, двигун володіє трьома ступенями свободи і в цьому необхідно знання додаткових залежностей, що зв'язують ці величини між собою.

Рівняння ланцюга збудження:

$$L_b \frac{di_b}{dt} + R_b i_b = u_b$$

де L_b - індуктивність ланцюга збудження;

i_b – струм збудження;

R_b - опір ланцюга збудження;

u_b – напруга ланцюга збудження.

Рівняння ланцюга якоря

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + k\Phi \omega = u_a$$

де L_a - індуктивність ланцюга ланцюга якоря;

i_a – струм ланцюга якоря;

R_a - опір якоря;

$k\Phi \omega$ - ЕРС обертання;

u_a - напруга ланцюга якоря.

Зміна магнітного потоку Φ можна прийняти пропорційним зміні струму збудження, ряд величин (M_C , L_b , L_a , R_b , R_a) також з урахуванням загальноприйнятих припущень приймаються постійними, тоді вихідне рівняння може бути записано наступним чином:

$$J_D \frac{R_J}{(k\Phi)^2} \frac{L_J}{R_J} \frac{d^2\omega}{dt^2} + J_D \frac{R_J}{(k\Phi)^2} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{k\Phi} U_J - \frac{R_J}{(k\Phi)^2} M_C$$

Приймаємо, що електромеханічна постійна часу

$$T_{M1} = \frac{J_D R_J}{(k\Phi)^2}$$

електромагнітна постійна часу якоря ланцюга

$$T_J = \frac{L_J}{R_J}$$

коефіцієнт передачі двигуна постійного струму за напругою

$$K_D = \frac{1}{k\Phi}$$

передавальний коефіцієнт двигуна постійного струму за статичним моментом (за впливом, що збурює)

$$K_M = \frac{R_J}{(k\Phi)^2}$$

Після підстановки прийнятих позначень остаточно отримаємо диференціальне рівняння двигуна постійного струму, записане щодо регульованої величини ω , при вхідній напрузі U_J і збурюючому МС дії:

$$T_{M1} T_J \frac{d^2\omega}{dt^2} + T_{M1} \frac{d\omega}{dt} + \omega = K_D U_J - K_M M_C$$

Дане рівняння в операторній (символічній) формі за нульових початкових умов буде записано

$$(T_{M1} T_J p^2 + T_{M1} p + 1) \omega(t) = K_D U_J(t) - K_M M_C(t)$$

Аналогічним чином можна визначити рівняння будь-яких елементів ланцюга регулювання. Залежно від виду конкретного елемента, ступеня його ідеалізації і від вибору фізичної природи вхідний і вихідний величин будуть змінюватися вид і порядок диференціального рівняння, що характеризує аналізований елемент.

Таким чином, можна укласти, що для аналітичного дослідження процесів, що відбуваються в системах регулювання, доцільно елементи системи розділяти на вигляд їх статичних і динамічних характеристик. Статичні характеристики елемента системи встановлюють зв'язок між вхідним і вихідним параметрами (величинами) в встановленому режимі. Статика системи регулювання визначає характеристики станів, що встановилися. Ця залежність може бути лінійною чи нелінійною. Більшість реальних статичних характеристик нелінійна, але розглядаючи відносно невеликі ділянки характеристик, що зв'язують вхід і вихід у нелінійних елементах, можна вважати, що збільшення входу і виходу можуть описуватися лінійними рівняннями, а значить, цей зв'язок можна лінійно-аризувати, що часто виконується на практиці при розрахунках і дослідях.

У статичці параметри окремих ланок, пов'язаних один з одним, повинні бути узгоджені між собою, тобто вихід одного елемента і вхід наступного повинні за всіма показниками відповідати один одному. Для подібних цілей статичні характеристики окремих елементів вибудовують в одній системі координат і визначають допустимі робочі діапазони зміни їх вхідних і вихідних величин. Динамічні характеристики аналітично пов'язують вхідний і вихідний параметри в перехідних режимах.

Отже, в даний час користуються декількома основними формами опису динамічних властивостей, як окремих елементів системи, так і їх поєднань. Найбільш часто для цих цілей користуються лінійними диференціальними рівняннями, широко використовують поняття передавальної функції, частотні і тимчасові характеристики, які в явному або перетвореному вигляді встановлюють закономірності зміни виходу в часі при відомому вході [1].

2.3.3 Перетворення Лапласа у застосуванні до теорії автоматичного регулювання

При дослідженні та розрахунках систем широко використовуються різні методи: аналітичний, чисельний, операторний, частотний. При дослідженні та розрахунках систем автоматики широко використовується операторний метод, що базується на перетворенні Лапласа [1].

Підставою для цього служить той факт, що подібне перетворення полегшує дослідження складних систем, замінюючи диференціальне рівняння алгебраїчним. При розв'язанні диференціальних рівнянь систем перетворення Лапласа дозволяє легко враховувати початкові умови та уникнути складних викладок, пов'язаних з обчисленням постійних інтегрування.

Перетворення Лапласа перетворює функцію речовинного змінного на функцію комплексного змінного, перетворює диференціальні рівняння в алгебраїчні, даючи переваги при вирішенні ряду завдань. Перетворення Лапласа засноване на застосуванні понять оригіналу $f(t)$ та зображення $F(p)$.

Оригінал – функція речового аргументу.

Зображення – функція комплексного аргументу.

Для того, щоб функція була оригіналом, вона повинні задовольняти умови Діріхле. Функція $f(t)$ зростає обмежено в розглянутому проміжку:

$$f(t) \leq Ae^{\alpha t}$$

На проміжку часу, що розглядається, функція обмежена зверху і знизу (має $\max$ і $\min$).

На проміжку, що розглядається, функція має кінцеве число розривів першого роду. Розриви другого роду відсутні.

За дотримання цих умов функція є оригіналом.

Для отримання зображення використовується пряме перетворення Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$$

За допомогою цього перетворення переходять до зображення

$$F(p) \cdot = \bullet f(t); \quad F(p) = \mathcal{L}[f(t)];$$

$$f(t) \cdot = \bullet F(p); \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)];$$

Зворотне перетворення за Лапласом:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha-j\omega}^{\alpha+j\omega} F(p) \cdot e^{pt} dp$$

У таблиці 2.1 представлені перетворення Лапласа для найчастіше використовуваних функцій у завданнях регулювання.

Таблиця 2.1 – Перетворення Лапласу для функцій, що часто використовуються

Оригінал функції $f(t)$	Зображення функції $F(p)$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{p}$
$e^{\pm at}$	$\frac{1}{p \pm \alpha}$
t	$\frac{1}{p^2}$

$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$

2.3.4 Поняття про передавальну функцію САК

Теоретично автоматичного керування часто використовують операторну форму запису диференціальних рівнянь. У цьому вводиться поняття диференціального оператора $p = d/dt$ отже, $dy/dt = py(p)$, а $pn = dn/dtn$. Це лише інше позначення операції диференціювання. Зворотна диференціювання операція інтегрування записується як $1/p$. В операторній формі вихідне диференціальне рівняння записується як алгебраїчне:

$$a_0 p^{(n)}y + a_1 p^{(n-1)}y + \dots + a_n y = (a_0 p^{(n)} + a_1 p^{(n-1)} + \dots + a_n)y = (b_0 p^{(m)} + b_1 p^{(m-1)} + \dots + b_m)u.$$

Варто відрізнити цю форму запису від операційного обчислення хоча б тому, що тут використовуються безпосередньо функції часу $y(t)$, $u(t)$ (оригінали), а не їх зображення $Y(p)$, $U(p)$, одержувані з оригіналів за формулою перетворення Лапласа. Разом з тим, за нульових початкових умов з точністю до позначень запису дійсно дуже схожі. Ця подібність лежить у природі диференціальних рівнянь. Тому деякі правила операційного исчисления застосовні до операторної форми запису рівняння динаміки.

Тому рівняння динаміки можна записати також у вигляді:

$$y = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} u = \frac{K(p)}{D(p)} u = W(p) \cdot u$$

Диференціальний оператор $W(p)$ називають передавальною функцією.

Передатна функція (елемента чи системи) – це відношення лапласове зображення відповідної вихідної величини до лапласового зображення вхідної величини за нульових початкових умов (елемент або система перебувають у стані спокою).

Вона визначає відношення вихідної величини ланки до вхідної у кожний момент часу:

$$W(p) = y(t)/u(t),$$

тому її ще називають динамічним коефіцієнтом посилення.

У режимі $d/dt = 0$, тобто $p = 0$, тому передаточна функція вироджується в коефіцієнт передачі (посилення) елемента або системи $K = b_m/a_n$. Знаменник передавальної функції (ліва частина характеристичного рівняння)

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n$$

називають характеристичним поліномом.

Його коріння, тобто значення p , при яких знаменник $D(p)$ обертається в нуль, а $W(p)$ прагне до нескінченності, називаються полісами передавальної функції.

Чисельник

$$K(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m$$

називають операторним коефіцієнтом передачі.

Його коріння, за якого $K(p) = 0$ і $W(p) = 0$, називаються нулями передавальної функції.

Передатна функція є дробово-раціональною функцією від незалежної змінної p . У системах автоматики ступінь полінома знаменника завжди вищий або дорівнює ступеню полінома чисельника ($m \leq n$).

Ланка САК з відомою передатною функцією називається динамічною ланкою. Воно зображується прямокутником, всередині якого записується вираз передавальної функції. Тобто це звичайна функціональна ланка, функція якої задана математичною залежністю вихідної величини від вхідної в динамічному режимі. Для ланки з двома входами і одним виходом повинні бути записані дві передавальні функції по кожному з входів. Передатна функція є основною характеристикою ланки в динамічному режимі, з якої можна отримати всі інші характеристики. Вона визначається тільки параметрами системи і не залежить від вхідних і вихідних величин

2.3.5 Поняття тимчасової характеристики (перехідна функція)

Оцінити динамічні властивості САК або її окремих ланок можна з використанням їх диференціальних рівнянь, або за допомогою графічних характеристик. Застосовуються два типи таких характеристик - тимчасові (або перехідні) і частотні. Показники можуть бути знайдені експериментально або побудовані за рівнянням (також можна і за експериментальними характеристиками скласти рівняння ланки).

Перехідні частотні характеристики однозначно пов'язані з рівнянням ланки (САК) і поряд з ним є вичерпним описом динамічних властивостей ланки (або САК).

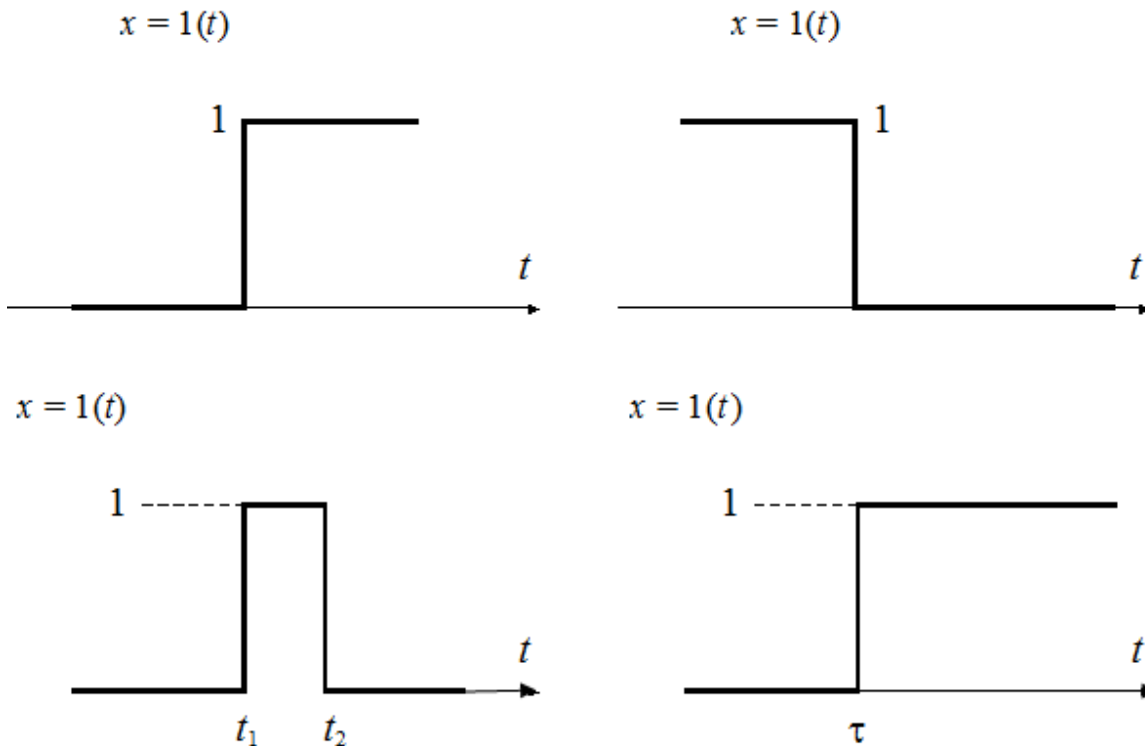
Для отримання тимчасових характеристик на вхід досліджуваного ланки подають один із типових впливів.

Найбільше застосування в теорії та практиці автоматичного керування знаходять такі чотири типові впливи: ступінчасте, імпульсне, гармонійне і лінійне.

Одиничний ступінчастий вплив - це вплив, який миттєво зростає від нуля до одиниці і далі залишається незмінним.

Для математичного запису такого типового впливу (рисунок 2.6) використовують одиничну ступінчасту функцію:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0 \\ 1, & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

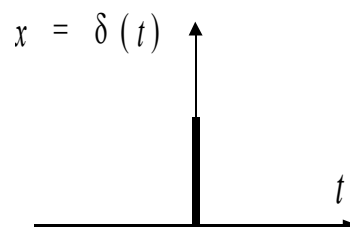


Одинична ступінчаста функція може мати інші види.

Як приклад ступінчастої дії можна навести будь-яке досить швидке збільшення або зменшення вхідної величини: миттєве збільшення навантаження на вал двигуна, різкий перепад температури, швидке збільшення навантаження в механічній системі, різке збільшення струму або напруги в електричній схемі і так далі, тобто найбільш несприятливі впливи для САК. Різке збільшення впливу на вході можна вважати одиничною ступінчастою функцією в тому випадку, якщо його тривалість набагато менше тривалості перехідного процесу, викликаного цим впливом.

Поряд з перехідною характеристикою $h(t)$ застосовується імпульсна перехідна характеристика, що являє собою реакцію ланки на одиничний імпульс. Одиничний імпульс - це математична ідеалізація гранично короткого імпульсного сигналу (малюнок 2.7).

У реальних САК це удар у механічній системі, струм короткого замикання в електричній мережі, стрибки тиску в гідросистемі, при цьому тривалість імпульсу дуже мала порівняно з тривалістю перехідного процесу.



Малюнок 2.7 – Одиничний імпульс

Одиничний імпульс $\delta(t)$ - імпульс, площа якого дорівнює одиниці при тривалості, що дорівнює нулю і амплітуді, що дорівнює нескінченності, тобто.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{при } t = 0 \\ 0, & \text{при } t > 0, t < 0 \end{cases}$$

Слід зазначити, що $\delta(t)$ і є одинична ступінчаста функція зв'язано співвідношенням

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}.$$

Аналітичний вираз для імпульсної перехідної характеристики - імпульсна перехідна функція або функція ваги, позначається $ki(t)$, тобто $ki(t) = y(t)$ при $x(t) = \delta(t)$, при цьому

$$w(t) = h'(t) = \frac{dh}{dt}.$$

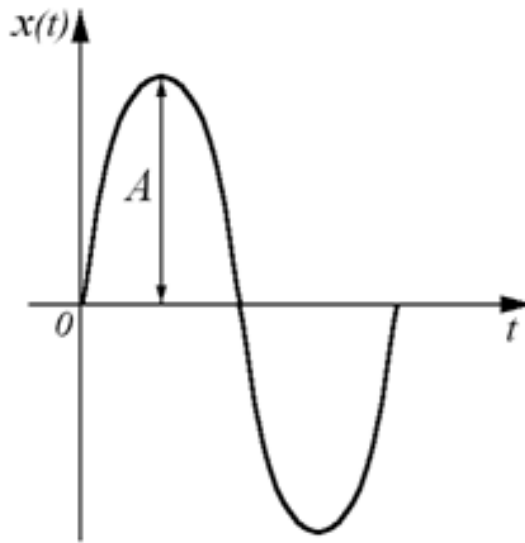
Як стандартний гармонійний вплив використовують сигнал синусоїдальної форми, що описується функцією (малюнок 2.8)

$$x(t) = A \cdot \sin \omega t \quad (-\infty < t < \infty),$$

де A – амплітуда сигналу;

$\omega = 2\pi/T$ – кругова частота, рад/с;

T – період сигналу, с.



Малюнок 2.8 – Гармонійний вплив

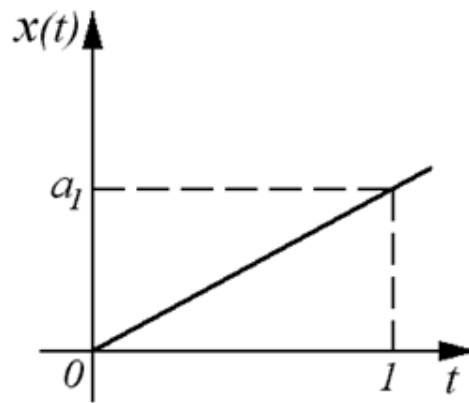
Гармонічні впливи широко використовуються при дослідженні точності та стійкості як стабілізуючих, так стежать і програмних автоматичних систем. Це пояснюється двома обставинами:

- а) реальні об'єкти часто мають періодичний характер та тому можуть бути представлені у вигляді суми гармонійних складових;
- б) математичний апарат аналізу автоматичних систем добре розроблений саме для гармонійних впливів.

Для стежать і програмних систем типовим є лінійний вплив (малюнок 2.9)

$$x(t) = 1(t)a_1 t \quad (0 \leq t < +\infty)$$

де a_1 – Коефіцієнт характеризує швидкість наростання впливу $x(t)$.



Малюнок 2.9 – Лінійно наростаючий сигнал

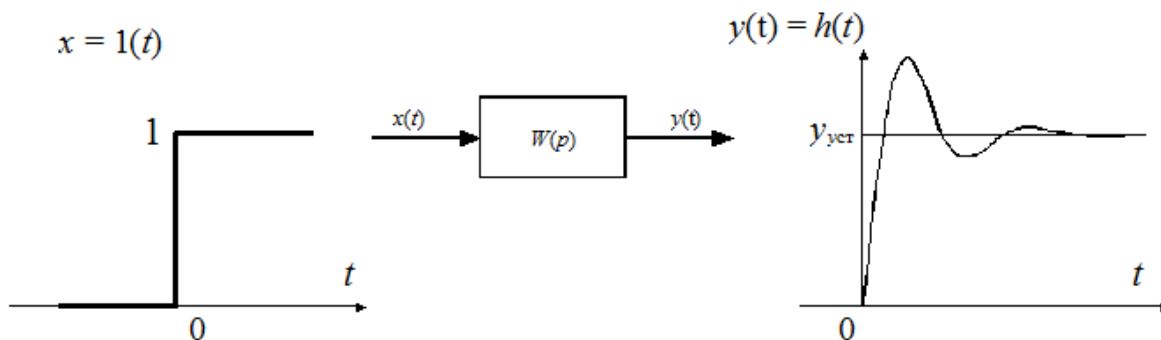
Слід також зауважити, що між передатною функцією ланки та перехідною характеристикою $h(t)$ існує взаємозв'язок

$$W(p) = p \cdot \int_0^{\infty} h(t) \cdot e^{-p \cdot \tau} \cdot dt,$$

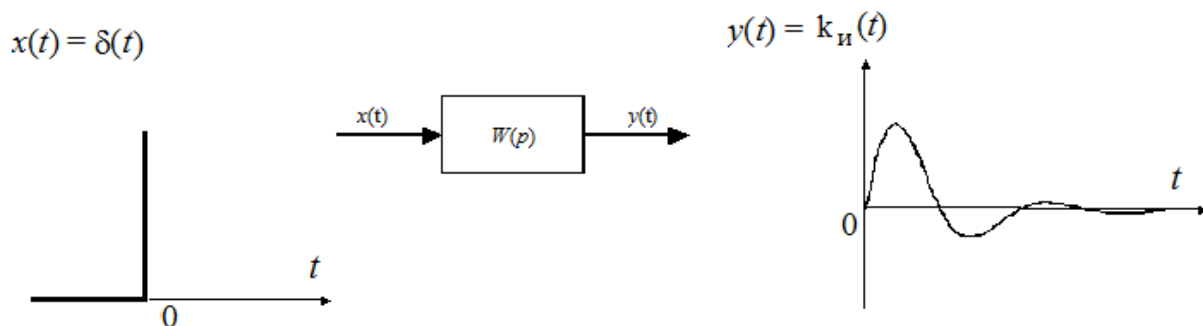
а між $W(p)$ та $k_i(t)$

$$W(p) = p \cdot \int_0^{\infty} k_u(t) \cdot e^{-p \cdot \tau} \cdot dt$$

Графічно процес отримання перехідної характеристики представлений малюнку 2.10, а отримання вагової функції – малюнку 2.11.



Малюнок 2.10 – Перехідна характеристика

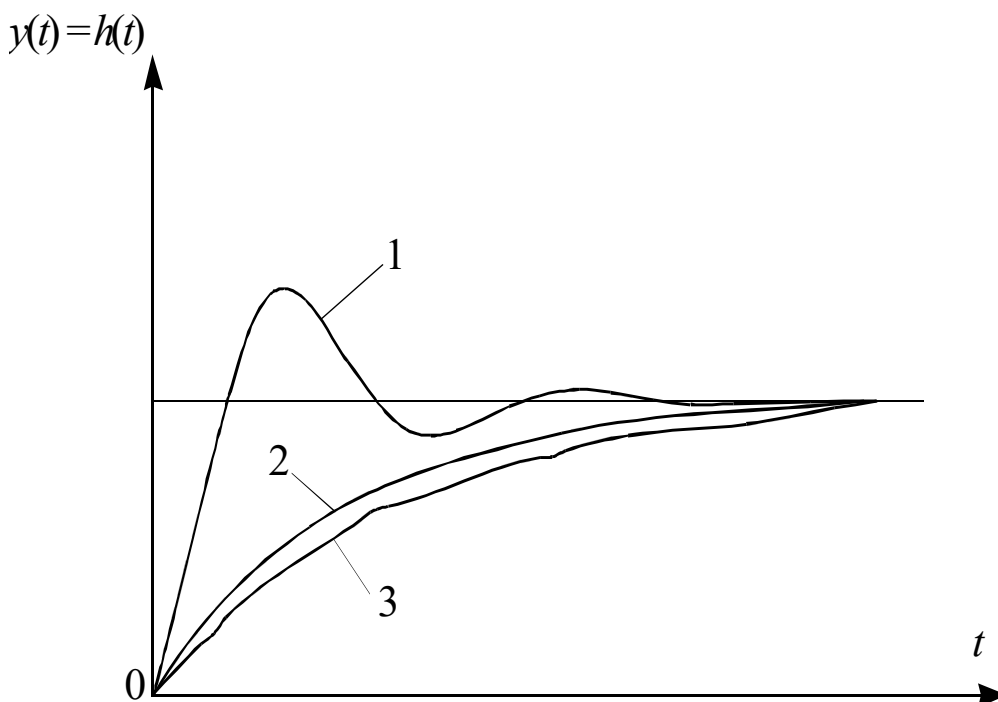


Малюнок 2.11 – Вагова функція

Перехідні процеси, що описуються перехідними функціями, вкрай різноманітні, і в основному їх можна розділити на три основні види (малюнок 2.12):

- коливальні (1);
- Аперіодичні (2);
- монотонні (3).

Передавальні та перехідні функції типових ланок представлені в додатку А.



Малюнок 2.12 – Основні види перехідних характеристик

2.3.6 Частотні характеристики

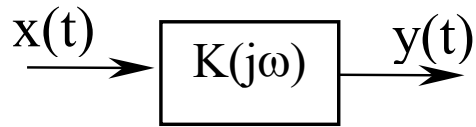
При аналізі систем автоматики також широко використовується поняття про частотні характеристики, яке застосовується як до окремих ланок, так і до системи в цілому. Якщо на вхід лінійної розімкнутої системи подати гармонійне обурення, то через деякий час після подачі такого обурення, коли загаснуть всі рухи, що визначаються перехідним процесом, на виході елементарної ланки або системи встановиться також гармонійна зміна вихідної величини з тією ж частотою, яку має вхідна величина, але з іншими ампліт.

Амплітуда та фаза на виході за інших рівних умов будуть залежати від частоти впливу, що обурює. За ними можна далі судити про динамічні властивості як елементарних ланок, а й складних замкнутих систем автоматичного регулювання.

На можливість такого судження стосовно дослідження динамічних властивостей електронних підсилювачів із зворотним зв'язком у 1932 вказував Найквіст, а на можливість застосування частотних методів аналізу до систем регулювання вказав в 1938 А.В. Михайлів.

Знаючи частотну характеристику елемента, можна визначити реакцію елемента на гармонійний вплив будь-якої частоти, і навіть у сумі гармонійних впливів різної частоти. Частотні характеристики широко використовуються в теорії та практиці автоматичного керування, так як реальні обурення, що діють на автоматичні системи, можуть бути представлені як сума гармонійних сигналів.

Перехід від передавальної функції ланки здійснюється простою заміною, тобто з аналізованого процесу як би виключається експонента. Фізично частотні характеристики ланки мають просту інтерпретацію. Розглянемо її на прикладі ланки малюнку 2.13.



Малюнок 2.13 – Ланка з частотною характеристикою

Нехай – синусоїдальна вхідна дія. Тоді в режимі, що встановився, вихідний сигнал також буде синусоїдальним:

$$y(t) = y_m \cdot \sin(\omega t + \phi) = y_m \cdot e^{j(\omega t + \phi)}$$

Комплексний коефіцієнт посилення

$$K(j\omega) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{y_m}{x_m} e^{j\phi}$$

До($j\omega$) може бути отриманий експериментально, або шляхом підставки $j\omega$ в передавальну функцію ланки замість p .

Залежність відношення амплітуд вихідного та вхідного сигналу від частоти називають амплітудно-частотною характеристикою (скорочено – АЧХ) та позначають $A(\omega)$ (рисунок 2.14)

$$\frac{y_m}{x_m} = A(\omega)$$

АЧХ показує, як елемент пропускає сигнали різної частоти. Оцінка пропускання проводиться стосовно амплітуд в режимі, що встановився. АЧХ має розмірність, що дорівнює відношенню розмірності вихідної величини до розмірності вхідний.

АФХ $W(j\omega)$ як і будь-яка комплексна величина, може бути представлена:

а) у показовій формі

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\phi(\omega)},$$

де $A(\omega)$ – модуль АФГ,

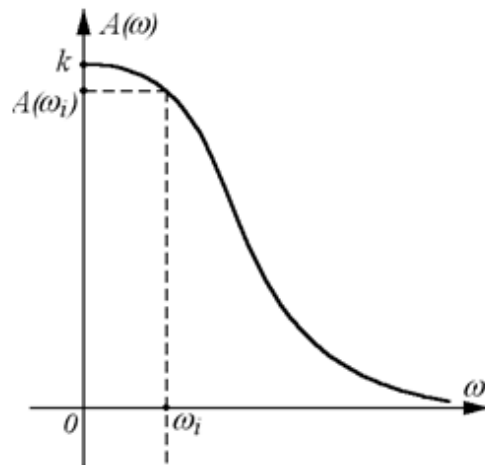
$\phi(\omega)$ – кут зсуву по фазі;

б) в алгебраїчній

$$W(j\omega) = R(\omega) + jQ(\omega)$$

в) тригонометричної

$$W(j\omega) = A(\omega) \cos \phi(\omega) + jA(\omega) \sin \phi(\omega).$$



Малюнок 2.14 – Амплітудно-частотна характеристика

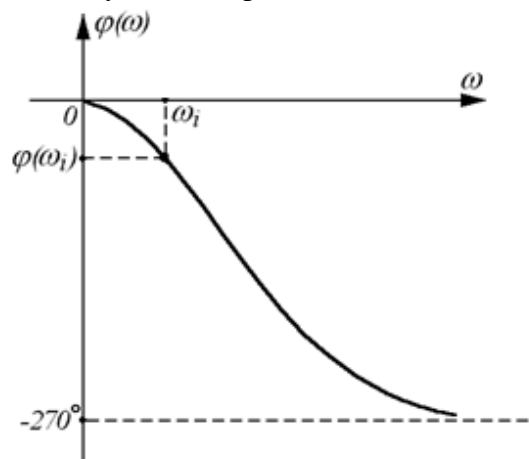
При зміні частоти від нуля до нескінченності вектор $W(j\omega)$ повертається навколо початку координат, при цьому одночасно збільшується або зменшується довжина вектора. Крива, яку опише кінець вектора, звана годографом, і є АФХ. Кожній точці показники відповідає певне значення частоти.

Проекції вектора $W(j\omega)$ на дійсну і уявну осі називають відповідно дійсною і уявною частотними характеристиками і позначають

$$U(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega), \\ V(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega).$$

У цьому, дійсна частотна характеристика $U(\omega)$ – завжди парна функція частоти, а уявна характеристика $V(\omega)$ – завжди непарна функція.

Залежність фазового зсуву між вхідним і вихідним сигналами від частоти називають фазо-частотною характеристикою (ФЧХ) і позначають $\varphi(\omega)$ (рисунки 2.15). Аналітичні вирази $A(\omega)$ і $\varphi(\omega)$ називають відповідно амплітудною та фазовою частотними функціями.



Малюнок 2.15 – Фазочастотна характеристика

ФЧХ показує, яке відставання чи випередження вихідного сигналу по фазі створює елемент при різних частотах в режимі, що встановився.

Амплітудну і фазову частотні характеристики можна об'єднати в одну загальну - амплітудно-фазову частотну характеристику (АФЧХ або АФХ). Амплітудно-фазова частотна характеристика $W(j\omega)$ є функцією комплексного змінного $j\omega$, модуль якої дорівнює $A(\omega)$, а аргумент дорівнює $\varphi(\omega)$. Кожному фіксованому значенню частоти ω_i і відповідає комплексне число $W(j\omega_i)$, яке на комплексній площині можна зобразити вектором, що має довжину $A(\omega_i)$ та кут повороту $\varphi(\omega_i)$ (рис. 2.16).

Негативні значення $\varphi(\omega)$, що відповідають відставанню вихідного сигналу від вхідного, прийнято відраховувати за годинниковою стрілкою від позитивного напрямку дійсної осі

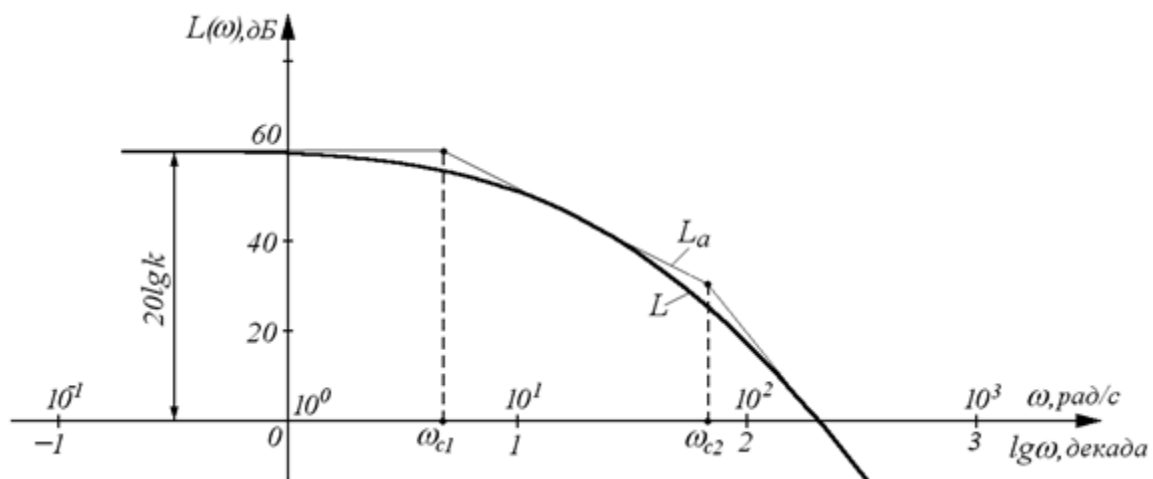
$$K(j\omega) = (A, \varphi).$$

Зв'язок між частотними функціями наступний:

$$K(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)},$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}.$$



Малюнок 2.16 – Амплітудно-фазова частотна характеристика

При практичних розрахунках автоматичних систем зручно використовувати частотні характеристики, побудовані в логарифмічній системі координат. Такі характеристики називають логарифмічні. Вони мають меншу кривизну і тому можуть бути приблизно замінені ламаними лініями, складеними з декількох прямолінійних відрізків. Причому ці відрізки здебільшого вдається побудувати без громіздких обчислень за допомогою деяких простих правил.

Крім того, у логарифмічній системі координат легко знаходити характеристики різних сполук елементів, так як множенню та поділу звичайних характеристик відповідає додавання та віднімання ординат логарифмічних характеристик.

За одиницю довжини осі частот логарифмічних характеристик приймають декаду.

Декада – інтервал частот, укладений між довільним значенням ω_i і та його десятикратним значенням $10\omega_i$. Відрізок логарифмічної осі частот, що відповідає одній декаді, дорівнює 1.

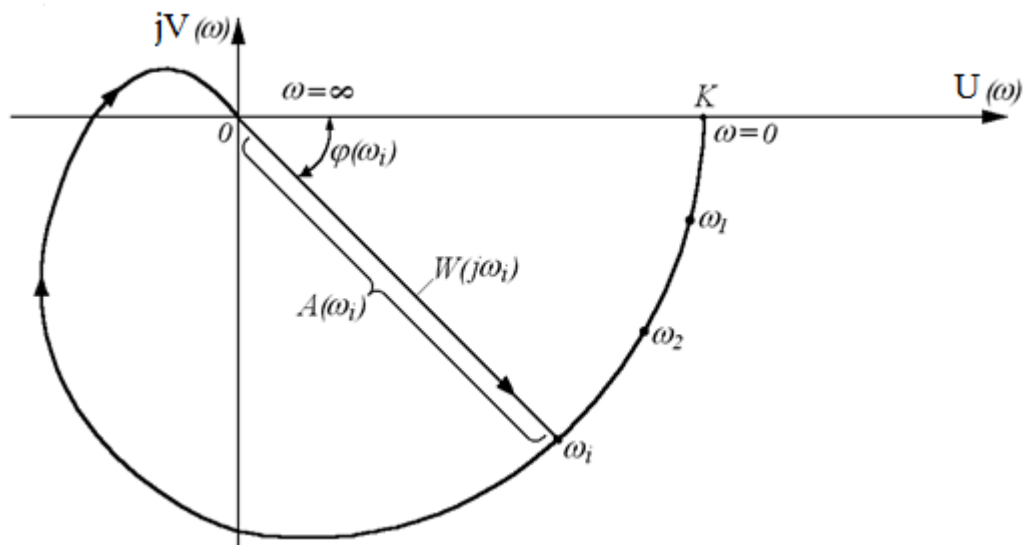
Зазвичай у розрахунках використовують логарифмічну амплітудну частотну характеристику (ЛАЧХ).

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega),$$

ординати якої вимірюють у логарифмічних одиницях – белах (Б) чи децибелах (дБ).

При побудові фазової частотної характеристики логарифмічний масштаб застосовують тільки для осі абсцис.

На малюнку 2.17 показані ЛАЧХ $L(\omega)$ (товста лінія) і відповідна їй наближена (асимптотична) характеристика $La(\omega)$ у вигляді прямолінійних відрізків (тонка лінія)



Малюнок 2.17 – Логарифмічна амплітудно-фазова частотна характеристика

Частоти, що відповідають точкам стикування відрізків, називають сполучними та позначають ω_c .

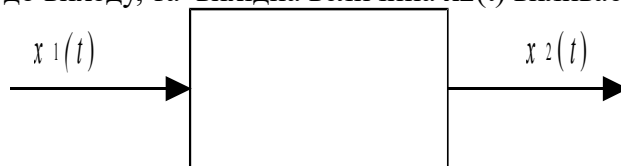
2.3.7 Динамічна ланка САК

При дослідженнях та розрахунках автоматичних систем неможливо скласти математичний опис усієї системи одночасно. Для полегшення завдання систему розбивають на окремі елементи і для кожного з них складають диференціальні рівняння, які записуються на основі відповідних їм фізичних законів. Для відображення динамічних властивостей елементів незалежно від їх фізичної природи використовують поняття динамічної ланки.

Динамічна ланка - частина автоматичної системи або елемента, що описується певним диференціальним рівнянням і володіє властивістю спрямованої дії.

Динамічна ланка – ланка САК з відомою передавальною функцією.

Спрямованість дії ланки означає, що вплив (рисунок 2.18) передається тільки в одному напрямку – від входу до виходу, та вихідна величина $x_2(t)$ впливає вхідну – $x_1(t)$.



Малюнок 2.18 – Динамічна ланка

Динамічним ланкою можна уявити елемент, сукупність елементів, автоматичну систему загалом. Слід зазначити, що позначення динамічного ланки не несе інформації про зв'язок вхідний і вихідний величин, тоді як із аналізу САК необхідно мати чітке уявлення про залежність цих величин.

Математичне опис САК може бути зроблено різними способами (наприклад, за допомогою диференціального рівняння або передавальних функцій). Ланка САК представляється, як звичайна функціональна ланка, функція якого задана математичною залежністю вихідної величини від вхідної в динамічному режимі. Для ланки з двома входами і одним виходом повинні бути записані дві передавальні функції по кожному з входів. Передатна функція є основною характеристикою ланки в динамічному режимі, з якої можна отримати всі інші характеристики. Вона визначається лише параметрами системи і не залежить від вхідних і вихідних величин.

Динаміка більшості функціональних елементів САК незалежно від виконання може бути описана однаковими за формою диференціальними рівняннями не більше другого порядку. Такі елементи називають елементарними динамічними ланками. Передаточна функція елементарної ланки в загальному вигляді задається ставленням двох поліномів не більш як другого ступеня:

$$W_{\Sigma}(p) = \frac{b_0 p^2 + b_1 p + b_2}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}$$

Відомо також, що будь-який поліном довільного порядку можна розкласти на прості співмножники не більше, ніж другого порядку. Так за теоремою Вієта модно записати

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n = a_0 (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n),$$

де $p_1, p_2, \dots, p_n$ - Корені полінома $D(p)$.

Аналогічно

$$K(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m = b_0 (p - p_1^*)(p - p_2^*) \dots (p - p_m^*),$$

де $p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*$ - Корені полінома $K(p)$.

Тобто

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{b_0 (p - p_1^*)(p - p_2^*) \dots (p - p_m^*)}{a_0 (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

Коріння будь-якого полінома може бути або речовим $p_i = a_i$,

або комплексними попарно пов'язаними $p_i = a_i \pm j\omega_i$. Будь-якому речовому кореню при розкладанні полінома відповідає співмножник $(p - a_i)$. Будь-яка пара комплексно пов'язаного коріння відповідає по-іншому другого ступеня, так як

$$(p - a_i + j\omega_i)(p - a_i - j\omega_i) = (p - a_i)^2 + \omega_i^2 = p^2 - 2pa_i + (a_i^2 + \omega_i^2).$$

Тобто будь-яку складну передатну функцію лінеаризованої САК можна представити як добуток передавальних функцій елементарних ланок. Кожній такій ланці в реальній САК, як правило, відповідає якийсь окремий вузол. Знаючи властивості окремих ланок можна будувати висновки про динаміки САК загалом.

2.4 Основні типові ланки систем регулювання

Для вивчення динамічних властивостей системи доцільно розглядати окремі її елементи тільки з точки зору їх динамічних властивостей незалежно від їх конкретного виконання.

Для того, щоб розглянути загальні властивості елементів системи та знати різницю між ними, необхідно впливати на них однотипними обуреннями. Одним з таких типових впливів є

розглянута раніше поодинокі ступінчаста (поштовхоподібна) функція. Тоді в залежності від виду перехідного, що виникає в елементі

процесу можна відносити цей елемент того чи іншого типу. Усю різноманітність існуючих лінійних елементів можна охарактеризувати

невеликою кількістю типових ланок або їх комбінацією.

Розрізняють такі типи ланок:

- а) безінерційне;
- б) інерційне першого порядку;
- в) диференціююча;
- г) інерційне другий порядок;
- д) інтегрує;
- е) інтегро-диференціююче;
- ж) запізнювальне.

2.4.1 Безінерційна ланка

Безінерційна ланка є найпростішою серед усіх типових ланок. Воно передає сигнал із входу на вихід миттєво, без спотворень його форми. У ланці може відбуватися тільки посилення або послаблення миттєвих значень вхідної величини.

Ланку прийнято називати безінерційною, якщо зв'язок між входом і виходом визначається виразом:

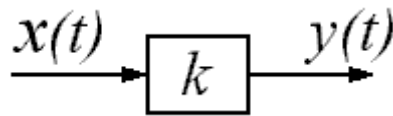
$$y(t) = Kx(t),$$

де $y(t)$ - Вихідна величина;

$x(t)$ – вхідна величина;

K – коефіцієнт посилення ланки.

Структурно дана ланка має вигляд, представлений на малюнку 2.19.



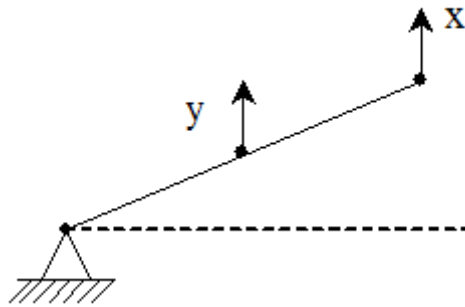
Малюнок 2.19 – Безінерційна ланка

Дану ланку також називають підсилювальним мулом безімітковим. Його передатна функція має вигляд:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = K(p) = K$$

Прикладом конструктивного виконання такої ланки можуть служити:

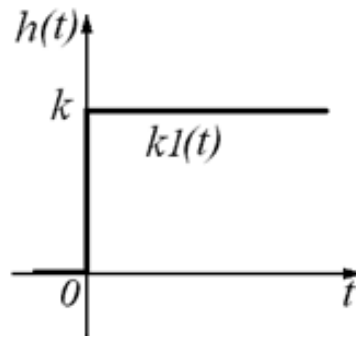
- а) електронна підсилювальна лампа;
- б) механічний редуктор;
- в) важільне зчленування (рис. 2.20).



Малюнок 2.20 – Приклад безінерційної ланки

Перехідна характеристика ланки (рис. 2.21).

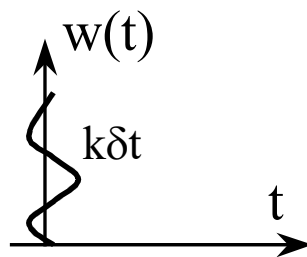
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[K \frac{1}{p} \right] = K \cdot 1(t).$$



Малюнок 2.21 – Графік перехідного процесу для безінерційної ланки

Вагова функція (рисунк 2.22)

$$w(t) = h'(t) = K\delta(t)$$



Малюнок 2.22 – Вагова функція безінерційної ланки

2.4.2 Інерційна ланка першого порядку (астатична)

Ланка називається інерційною, якщо зв'язок між виходом і виходом ланки визначається диференціальним рівнянням виду

$$y(t) + T \frac{dy(t)}{dt} = Kx(t)$$

де $x(t)$, $y(t)$ – відповідно вхідна та вихідна величини ланки;

K – коефіцієнт посилення ланки;

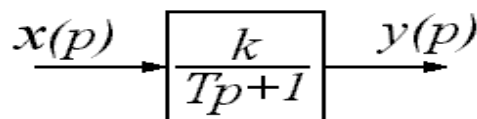
T – стала часу ланки.

Подібну ланку також називають аперіодичним, статичним, односмісним, релаксаційним.

Передатна функція інерційної ланки має вигляд

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = K(p) = \frac{K}{Tp + 1}$$

Структурно дана ланка має вигляд, представлений на малюнку 2.23.



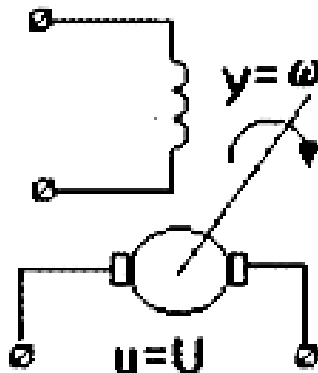
Прикладом конструктивного виконання подібного є:

- а) пасивний чотириполюсник;
- б) термopapa;
- в) магнітний підсилювач;

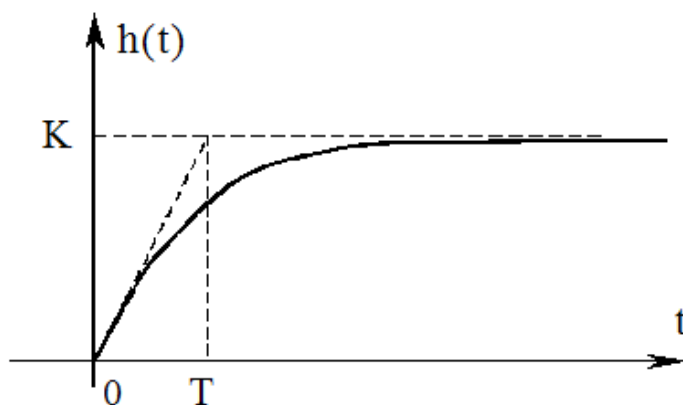
г) електричний двигун із рядом припущень, якщо вхід – напруга, а вихід – кутова швидкість (малюнок 2.24).

Перехідна характеристика ланки (малюнок 2.25)

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K}{1+Tp} \cdot \frac{1}{p} \right] = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}).$$



Малюнок 2.24 – Електричний двигун як інерційна ланка



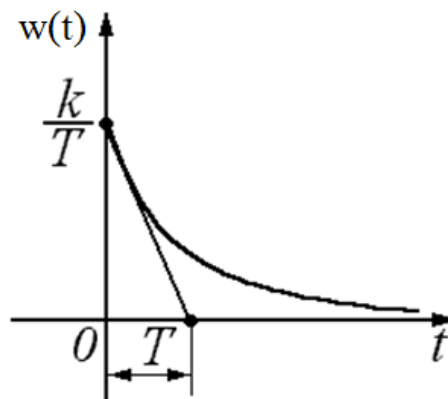
Малюнок 2.25 – Графік перехідного процесу для інерційної ланки

При $t = T$ перехідна характеристика досягає приблизно 63,2% значення K , при $t = 2T$ приблизно 86,5%, при $t = 3T$

приблизно 95,0 % при $t = 4T$ приблизно 98,2 %.

Вагова функція (рисунок 2.25)

$$w(t) = h'(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}.$$



Малюнок 2.25 – Вагова функція інерційної ланки

2.4.3 Диференціююча ланка

Розрізняють ідеальне і реальне ланки, що диференціюють. Ідеальна диференціююча ланка характеризується рівнянням

$$y(t) = K \frac{dx(t)}{dt}$$

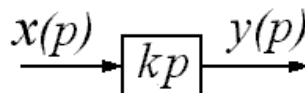
Таким чином, у ланці вихідна величина пропорційна швидкості зміни вхідної величини

При зміні вхідної величини перехідний процес у подібній ланці теоретично відбувається миттєво. При подачі на вхід поштовхоподібного обурення на виході виходить миттєвий вихідний імпульс, що теоретично має нескінченно велику амплітуду, відповідну нескінченно великій швидкості зміни вхідної величини у момент подачі поштовху.

Передатна функція ланки має вигляд

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = K(p) = Kp.$$

Структурно ідеальна ланка, що диференціює, має вигляд, наведений на малюнку 2.26.



Малюнок 2.26 – Ідеальна диференціююча ланка

Перехідна характеристика (рисунок 2.27)

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[Kp \frac{1}{p} \right] = \mathcal{L}^{-1} [K] = K \mathcal{L}^{-1} [1] = K\delta(t).$$

Вагова функція ланки дорівнює (рисунок 2.28)

$$w(t) = h'(t) = K \cdot \delta'(t).$$

Прикладами ідеальних диференційних ланок можуть служити:

- а) вал двигуна (рисунок 2.29);
- б) ділянку електричного ланцюга з ємністю (рис. 2.30);

в) ділянку електричного кола з індуктивністю (рисунок 2.31).

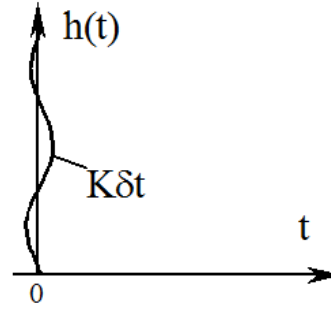
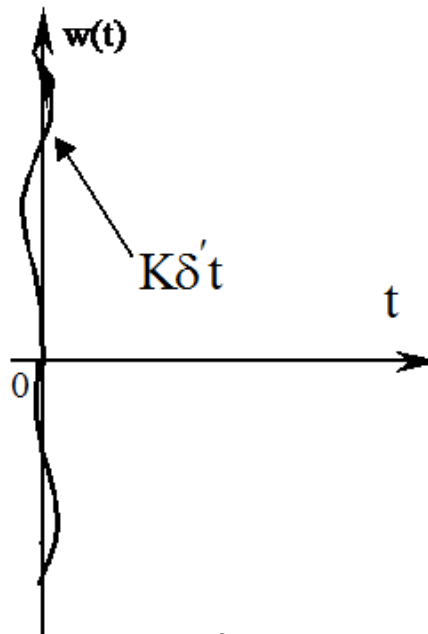


Рисунок 2.27 – Перехідний процес в ідеальному диференціюючій ланці

Оскільки практично реалізувати ідеальну диференціюючу ланку не представляється можливим, то застосовуються ланки, що виконують диференціювання більш менш наближено і їх називають реальні диференціюючі ланки.



Малюнок 2.28 - Вагова функція ідеальної ланки, що диференціює

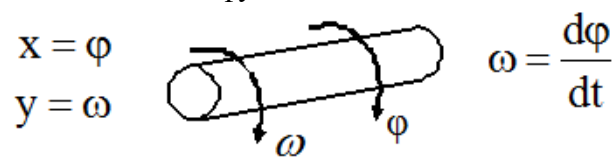
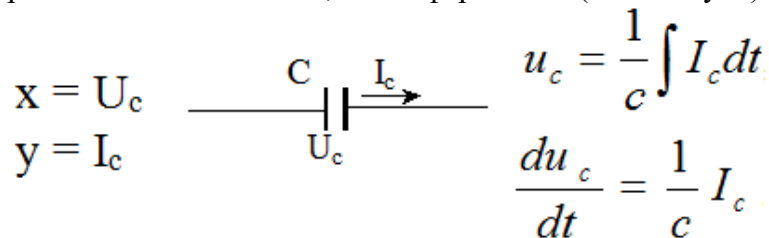
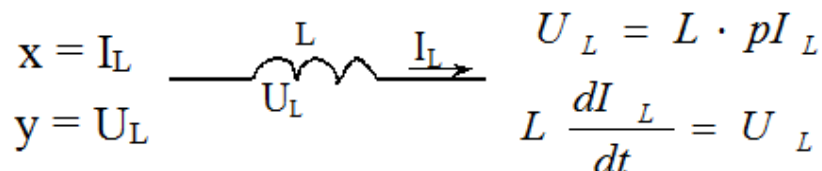


Рисунок 2.29 – Приклад ідеальної ланки, що диференціює (вал двигуна)



Малюнок 2.30 – Приклад ідеальної ланки, що диференціює (ємність)



Малюнок 2.31 – Приклад ідеальної ланки, що диференціює (індуктивність)

Диференціальне рівняння реальної ланки, що диференціює, має вигляд:

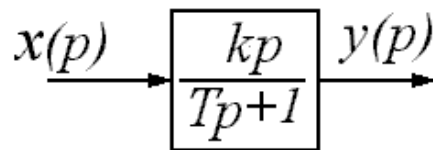
$$y(t) + T \frac{dy(t)}{dt} = K \frac{dx(t)}{dt}.$$

Передатна функція ланки

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = K(p) = \frac{KTp}{Tp + 1} = \frac{K_1 p}{Tp + 1}$$

де $K_1 = KT$.

Структурно реальна диференціююча ланка представлена на малюнку 2.32.



Малюнок 2.32 – Реальна ланка, що диференціює

Прикладом реальної ланки, що диференціює, може служити RC-ланцюжок (рисунок 2.33).

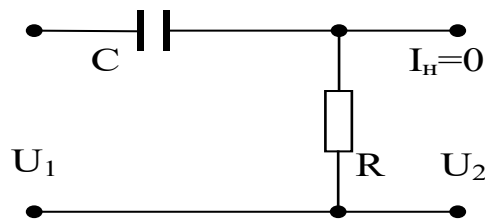


Рисунок 2.33 – Приклад реальної ланки, що диференціює

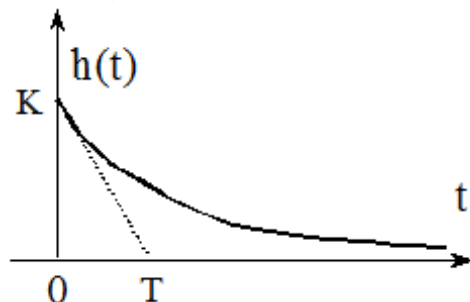
Передатна функція ланки (рисунок 2.32) визначатиметься наступним чином:

$$W(p) = \frac{R}{\frac{1}{Cp} + R} = \frac{RCp}{RCp + 1} = \frac{Tp}{Tp + 1}$$

де $T = RC$ - постійна часу.

Перехідна характеристика (рисунок 2.34)

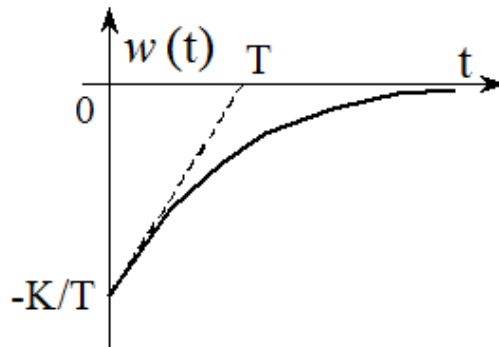
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{KpT}{Tp+1} \cdot \frac{1}{p} \right] = KT \left(\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right) \cdot 1(t) = K e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$$



Малюнок 2.34 – Перехідна характеристика реального диференціюючої ланки

Вагова функція (млюнок 2.35)

$$w(t) = h'(t) = \frac{-k}{T} \cdot e^{\frac{-t}{T}}.$$



Малюнок 2.35 – Вагова функція реального диференціюючої ланки

Як приклад подібної ланки можна навести пасивні чотиріполюсники, що містять RC (RL) в електричних ланцюгах, заспокійливий з пружиною в механічних ланцюгах. Ці ланки є випереджаючими і їх можна застосовувати для корекції.

2.4.4 Інтегруюча ланка

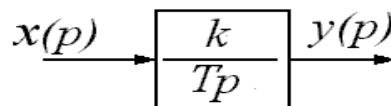
Ланку називають ідеально інтегруючою, якщо її вихідна величина пропорційна інтегралу за часом від величини, що подається на вхід, і визначається рівнянням виду:

$$y(t) = \frac{K}{T} \int x(t) dt$$

Передатна функція ланки:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = K(p) = \frac{K}{Tp}$$

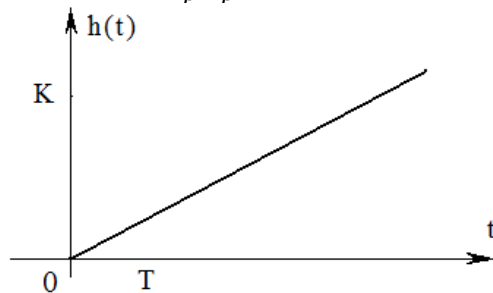
Структурно ланка має вигляд, як у малюнку 2.36.



Малюнок 2.36 – Ідеальна інтегруюча ланка

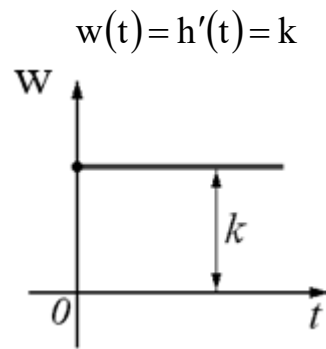
Перехідна характеристика (рисунок 2.37)

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K}{Tp} \cdot \frac{1}{p} \right] = \frac{K}{T} \cdot t$$



Малюнок 2.37 – Перехідна характеристика інтегруючої ланки

Імпульсна перехідна характеристика (або функція ваги) має вигляд (рисунок 2.38):

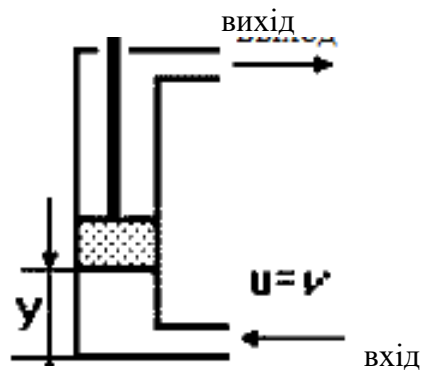


Малюнок 2.38 – Вагова функція ідеальної інтегруючої ланки

Інтегруючу ланку також називають астатичним. Це положення пояснюється тим, що для створення астатичної системи регулювання необхідна наявність у ній інтегруючої ланки. Водночас, слід пам'ятати, що тільки наявність інтегруючої ланки не є достатньою ознакою для віднесення системи регулювання до астатичної.

Прикладами конструктивного виконання інтегруючої ланки можуть служити:

а) поршневий гідравлічний виконавчий двигун (малюнок 2.39);



Малюнок 2.39 – Поршневий гідравлічний виконавчий двигун

Динаміка процесів у коливальній ланці описується рівнянням

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2T\xi \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t),$$

де k – коефіцієнт посилення ланки;

T – постійна часу коливальної ланки;

ξ – коефіцієнт демпфування ланки (або коефіцієнт загасання).

Залежно від величини коефіцієнта демпфування розрізняють чотири типи ланок:

а) коливальне $0 < \xi < 1$;

б) аперіодична ланка II порядку $\xi > 1$;

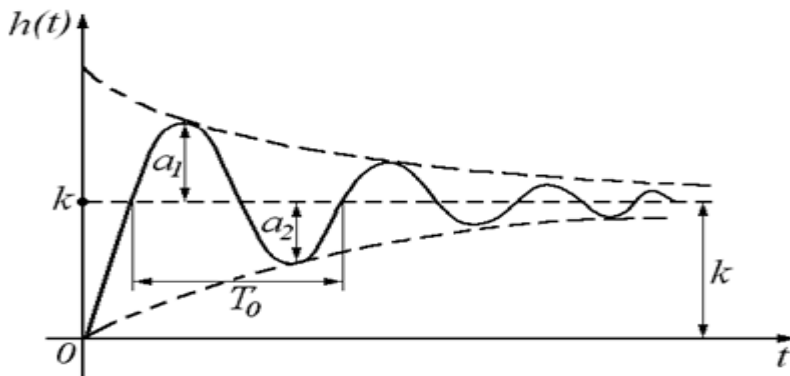
в) консервативна ланка $\xi = 0$;

г) нестійка коливальна ланка $\xi < 0$.

Перехідна характеристика коливальної ланки (малюнок. 2.41)

$$h(t) = k \left(1 - \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_0 t + \varphi) \right),$$

$$\text{де } \alpha = \frac{\xi}{T}; \omega_0 = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}; \varphi = \arctg \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}; T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$



Малюнок 2.41 – Перехідний процес коливальної ланки

Амплітуди перших двох коливань визначають величину

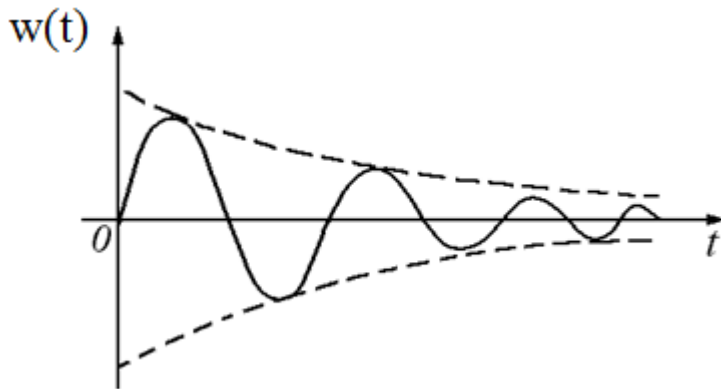
$$\alpha = \frac{1}{T_0} \ln \frac{a_1}{a_2}$$

Чим ближче коефіцієнт загасання до одиниці, тим менше амплі-туди коливань, чим менше T , тим швидше встановлюються перехідні процеси.

Вагова функція (рисунок 2.42)

$$w(t) = h'(t) = k \cdot \left(-\frac{(-\alpha)}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) - \frac{e^{-\alpha t} \cdot \omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) \right),$$

$$w(t) = h'(t) = \frac{ke^{-\alpha t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot (\alpha \sin(\omega_0 t + \varphi) - \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi))$$



Малюнок 2.42 – Вагова функція коливальної ланки

Для аперіодичного ланки другого порядку перехідна характеристика визначається (малюнок 2.43)

$$h(t) = k \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right),$$

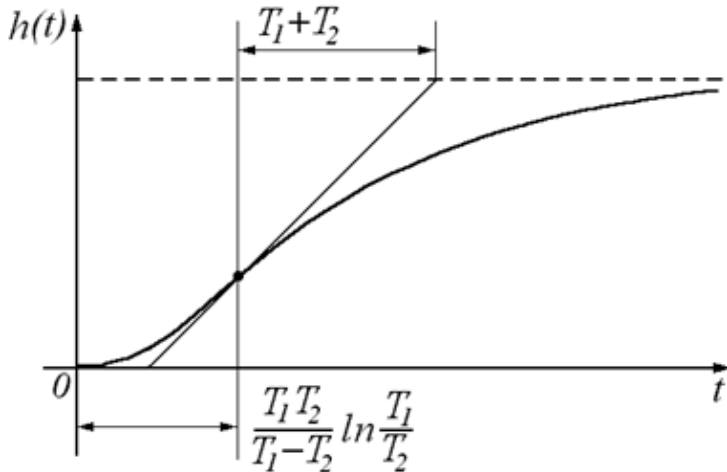
де

$$T_1 = \frac{T}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}},$$

$$T_2 = \frac{T}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}},$$

$$T_1 > T_2.$$

При $\xi > 1$ коливальна ланка називається аперіодичною ланкою другого порядку (послідовне з'єднання двох аперіодичних ланок з постійними часу T_1 і T_2).

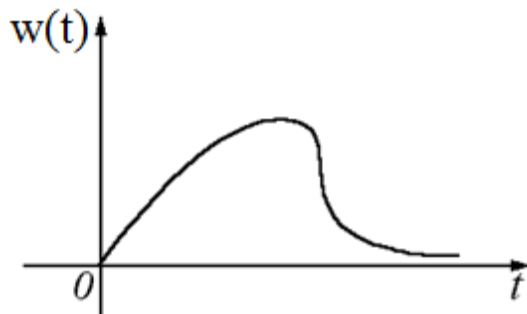


Малюнок 2.43 – Перехідний процес аперіодичної ланки другого порядку

Вагова функція (рисунок 2.44)

$$w(t) = h'(t) = k \cdot \left(-\frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot \left(-\frac{1}{T_1} \right) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot \left(-\frac{1}{T_2} \right) \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \right),$$

$$w(t) = h'(t) = \frac{k}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right).$$



Малюнок 2.44 - Вагова функція аперіодичного ланки

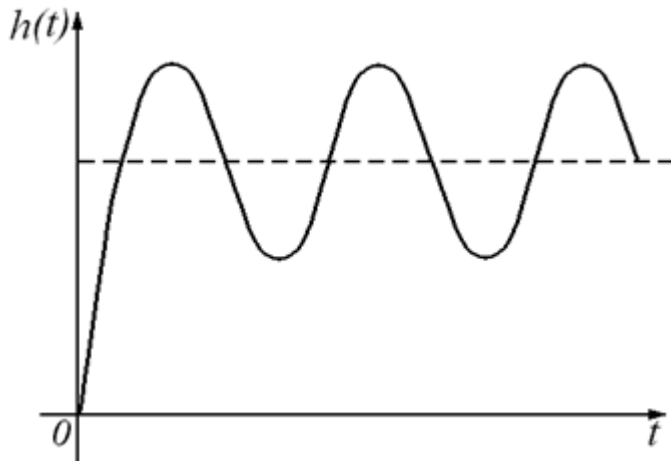
Для консервативної ланки перехідна характеристика (рисунок 2.45) буде визначено

$$h(t) = k \cdot \sin(\omega_0 t + \phi)$$

або можна записати так

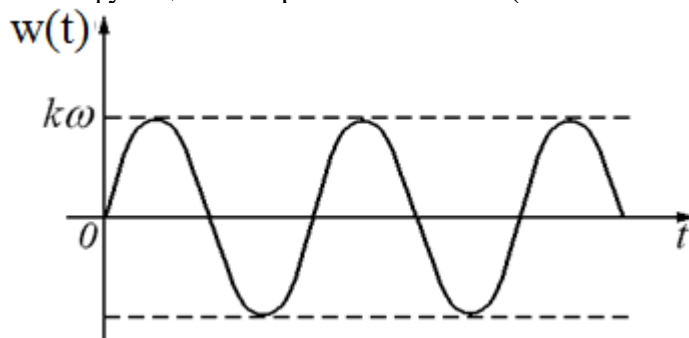
$$h(t) = k[1 - \cos(\omega_0 t)],$$

Де ω_0 - величина, зворотна постійної часу ($\omega_0 = 1/T$); $\varphi = \frac{\pi}{2}$.



Малюнок 2.45 – Перехідний процес консервативної ланки

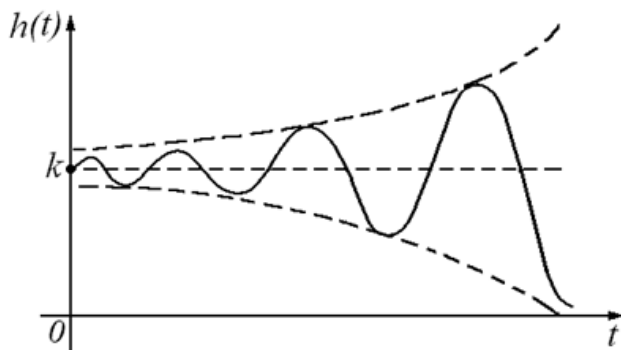
Вагова функція консервативної ланки (малюнок. 2.46)



Малюнок 2.46 – Вагова функція консервативної ланки

Нестійка коливальна ланка має перехідну характеристику (рисунок 2.47)

$$h(t) = k \left(1 - \frac{e^{\alpha t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_0 t + \varphi) \right).$$



Малюнок 2.47 – Перехідна характеристика нестійкої коливальної ланки

Усі перехідні характеристики коливатимуться вздовж величини k .
Передавальні функції ланок будуть такими:

а) коливальна ланка (малюнок 2.48)

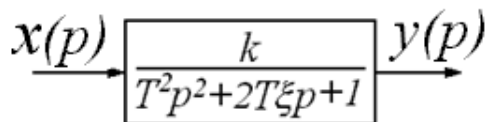
$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}$$

б) аперіодична ланка (рисунок 2.49)

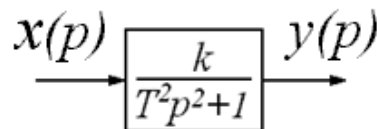
$$W(p) = \frac{k}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1} = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$$

в) консервативна ланка

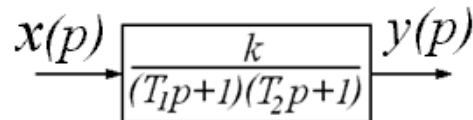
$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 1}$$



Малюнок 2.48 – Коливальна ланка



Малюнок 2.49 – Аперіодична ланка



Контрольні запитання

1. Що таке статична характеристика елемента чи системи?
2. Який режим САК називається динамічним?
3. Які характеристики називаються лінійними та нелінійними?
4. Що називається регулюванням?
5. Назвіть можливі види перехідних процесів у САК, які є допустимими для нормальної роботи САК?
6. Що називається рівнянням динаміки? Який його вигляд?
7. Як провести теоретичне дослідження динаміки САК?
8. Що називається лінеаризацією і який її геометричний зміст?
9. У чому полягає математичне обґрунтування лінеаризації?
10. Як проводиться лінеаризація диференціальних рівнянь САК?
11. Чому рівняння динаміки САК називається рівнянням у відхиленнях?
12. Чи справедливий для рівняння динаміки САК принцип суперпозиції? Чому?
13. Що виражає диференціальне рівняння ланки?
14. Запишіть лінеаризоване рівняння динаміки у звичайній та в операторній формах?
15. У чому сенс і які властивості має диференціальний оператор p ?
16. Що називається і які Ви знаєте типові вхідні дії? Навіщо вони потрібні?
17. Що називається перехідною характеристикою?
18. Що називається імпульсною перехідною характеристикою?
19. Що називається тимчасовими характеристиками?
20. Як отримати криву перехідного процесу за складної форми вхідного впливу, якщо відома перехідна характеристика ланки?

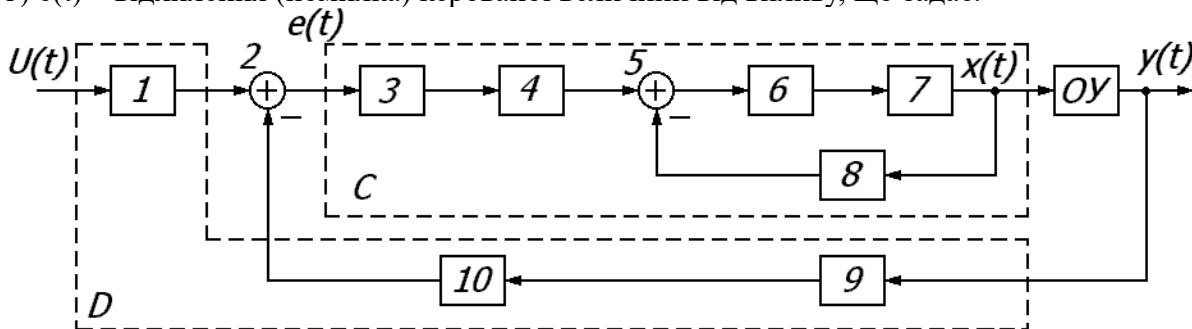
21. Що називається безінерційною ланкою, її рівняння динаміки, передатна функція, вид перехідної характеристики?
22. Що називається інтегруючою ланкою, її рівняння динаміки, передатна функція, вид перехідної характеристики?
23. Що називається аперіодичним ланкою, його рівняння динаміки, передатна функція, вид перехідної характеристики?
24. Що називається коливальною ланкою, її рівняння динаміки, передатна функція, вид перехідної характеристики?
25. Що називається консервативною ланкою, її рівняння динаміки, передатна функція, вид перехідної характеристики?
26. Чому не є елементарними інерційні ланки другого порядку з коефіцієнтом загасання більшим чи рівним одиниці?
27. Що називається ідеальною ланкою, що диференціює? Чому її не можна реалізувати?
28. Що називається реальним диференціюючим ланкою, його рівняння динаміки, передатна функція, вид перехідної характеристики?
29. Що таке постійна часу та коефіцієнт посилення? Яку роль ці параметри грають у перехідних процесах?

3. ПРИКЛАДИ РІШЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАВДАНЬ

3.1 Алгоритмічний опис САК

На підставі структурної схеми (рисунку 3.1) виконати її опис згідно з основними поняттями та визначеннями ТАК, якщо відомі:

- а) $U(t)$ – вплив, що задає (загальний сигнал в систему);
- б) $x(t)$ – керуючий вплив (те, що виробляє регулятор);
- в) $y(t)$ – керована величина;
- г) $e(t)$ – відхилення (помилка) керованої величини від впливу, що задає.



Малюнок 3.1 – Початкова структурна схема

Відповідно до структурної схеми малюнка 6.1 можна виділити такі елементи:

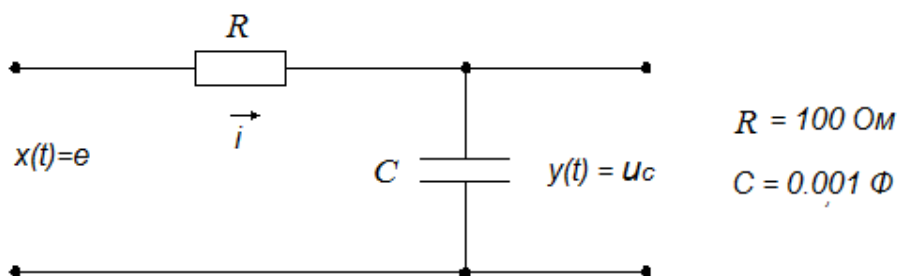
- а) 1 – пристрій, що задає, яке перетворює вхідний сигнал $U(t)$ в сигнал, зручний для подальшого використання;
- б) 2 - порівнюючий пристрій, виробляє сигнал помилки (відхилення) як різницю сигналу, що задає, і керованої величини;
- в) 3 □ перетворюючий пристрій, перетворює сигнал помилки іншу форму, зручну для подальшого використання, при цьому не виконуються функції посилення та корекції;

- г) 4 і 8 - коригувальні пристрої, покращують динамічні властивості регулювання і підвищують стійкість (4 - послідовна корекція, 8 - паралельна корекція);
 д) 5 - порівнюючий пристрій місцевого зворотного зв'язку;
 е) 6-підсилювальне пристрій, посилює потужність сигналу;
 ж) 7 - виконавчий пристрій, що виробляє керуюче вплив $x(t)$ безпосередньо на об'єкт керування;
 з) 9 – чутливий елемент, що фіксує (вимірює) керовану величину $y(t)$;
 і) 10 – елемент головного зворотного зв'язку, перетворює керовану величину $y(t)$ у вигляді, зручний для порівняння з сигналом, що задає;
 к) ОУ - об'єкт керування.
 Блоки 1,9 і 10 утворюють датчик, а блоки з 3-го по 8-й - сервомеханізм.

3.2 Визначення статичних та динамічних характеристик елемента САК

Для елемента САК (чотириполюсника), схема та параметри якого наведені на малюнку 3.2, знайти наступні статичні та динамічні характеристики:

- а) диференціальне рівняння;
 б) перехідну функцію;
 в) передавальну функцію;
 г) передавальний коефіцієнт



Малюнок 3.2 – Схема та параметри елемента

Складемо диференціальне рівняння елемента. Відповідно до законів лінійних електричних кіл запишемо наступні рівняння:

$$R \cdot i + u_C = e, \quad (3.1)$$

$$i = C \frac{du_C}{dt}. \quad (3.2)$$

Підставляючи значення струму i (3.2) у вираз (3.1), отримуємо диференціальне рівняння

$$R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = e.$$

Підставляючи параметри R і C чотириполюсника рівняння (3.2) отримуємо шукане диференціальне рівняння елемента

$$0,1 \frac{du_C}{dt} + u_C = e. \quad (3.3)$$

Для знаходження перехідної функції елемента Вважаємо вхідний сигнал чотириполюсника рівним одиничному ступінчастому впливу $e = 1(t)$. Тоді його вихідний сигнал дорівнюватиме перехідній функції

$$u_C = h(t).$$

Відповідно до вхідного сигналу рівняння буде записано:

$$0,1 \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = 1(t). \quad (3.4)$$

Вимушену складову перехідної функції знаходимо вважаючи у ньому похідну $dh(t)/dt=0$

$$h_v(t) = 1. \quad (3.5)$$

Складаємо характеристичне рівняння, що відповідає диференційному рівнянню (3.5)

$$0,1p + 1 = 0.$$

Корінь характеристичного рівняння $p=-10$.

Вільну складову перехідної функції знаходимо при $n = 1$ та $p_1 = -10$

$$h_c(t) = C_1 e^{-10t}. \quad (3.6)$$

Знаходимо перехідну функцію, підсумовуючи її вимушену (3.5) та вільну (6.6) складов

$$h(t) = h_v(t) + h_c(t) = 1 + C_1 e^{-10t}. \quad (3.7)$$

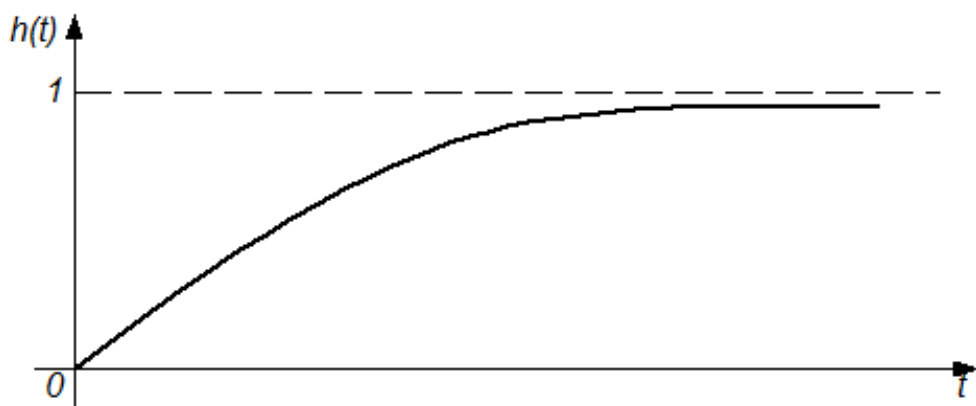
З рівняння (3.7) за нульових початкових умов ($h(0) = 0$) визначаємо коефіцієнт

$$C_1 = -1.$$

Підставляючи значення цього коефіцієнта вираз (3.7), знаходимо шукану перехідну функцію елемента

$$h(t) = 1 - e^{-10t}.$$

Графік перехідної функції елемента наведено малюнку 3.3.



Малюнок 3.3 – Графік перехідної функції елемента

Для виведення передавальної функції елемента в диференціальному рівнянні (3.4) ступеня поліномів правої та лівої частин відповідно $m = 0$ та $n = 1$. Тоді коефіцієнти цього рівняння $b_0 = 1$, $a_0 = 0,1$, $a_1 = 1$.

При цих коефіцієнтах згідно з описом типових динамічних ланок знаходимо шукану функцію елемента.

Оскільки передатна функція є зіставлення вихідний величини до вхідної, то з урахуванням перетворень Лапласа, рівняння (3.4) в операторній формі матиме вигляд

$$0,1u_c(p) \cdot p + u_c(p) = e(p). \quad (3.8)$$

$$e(p) = u_c(p) \cdot (0,1p + 1)$$

$$W(p) = \frac{u_c(p)}{e(p)} = \frac{1}{0,1p+1}. \quad (3.9)$$

Для пошуку передавального коефіцієнта елемента слід врахувати, що якщо коефіцієнт $a_0 = 0$ для передавальної функції

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n},$$

то передатна функція не має нульового полюса ($p = 0$), що характеризується її елемент й називають астатичним і передавальна функція цього елемента при $p = 0$ дорівнює передаточному коефіцієнту

$$K = W(0) = \frac{b_m}{a_n}.$$

Тоді шуканий передаточний коефіцієнт елемента знаходимо для чотириполосника при $b_0 = 1$ і $a_1 = 1$

$$K = \frac{1}{1} = 1.$$

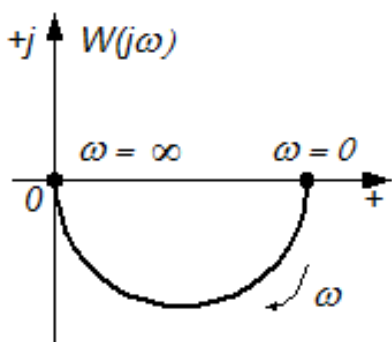
Або з виразу (3.9) при $p=0$

$$K = W(0) = \frac{1}{0 + 1} = 1.$$

Визначимо частотні характеристики елемента. Амплітудно-фазову частотну характеристику (АФЧХ) елемента знаходимо шляхом підстановки в нього передавальної функції (3.9) при $p = j\omega$

$$W(j\omega) = \frac{1}{0,1j\omega + 1} = \frac{1 - 0,1j\omega}{1 + (0,1\omega)^2} = \frac{1}{1 + 0,01\omega^2} - j \frac{0,1\omega}{1 + 0,01\omega^2}. \quad (3.10)$$

Вид АФЧХ на комплексній площині наведено малюнку 3.4



Малюнок 3.4 – АФЧХ чотириполосника

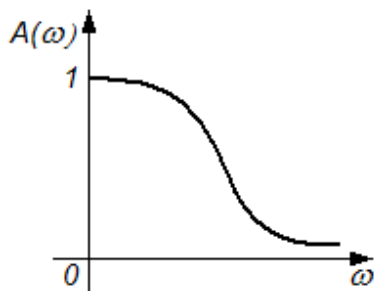
З виразу (3.10) знаходимо дійсну та уявну частотні характеристики

$$P(\omega) = \frac{1}{1 + 0,01\omega^2},$$

$$Q(\omega) = -\frac{0,1\omega}{1 + 0,01\omega^2}.$$

Підставляючи значення цих характеристик, знаходимо шуканий вираз для амплітудної частотної характеристики, графік якої наведено на малюнку 3.6:

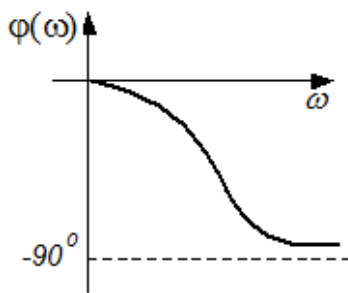
$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,01\omega^2}}.$$



Малюнок 3.6 – АЧХ чотириполосника

Фазова частотна характеристика (рисунок 3.7) визначиться так

$$\phi(\omega) = \arg(W(j\omega)) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg(-0,1\omega).$$

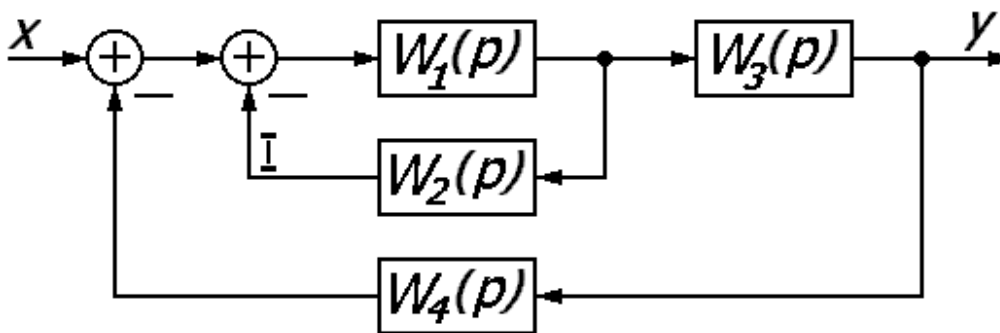


Малюнок 3.7 – ФЧХ чотириполюсника

ОСОБЛИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ СТРУКТУРНИХ СХЕМ САК

Перетворення найпростіших САК

Розглянемо найпростішу структурну схему (рисунок 3.8)

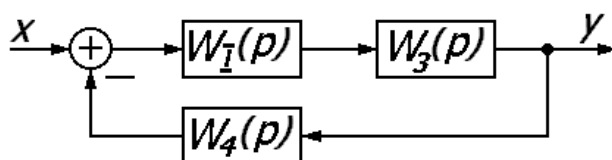


Малюнок 3.8 – Початкова структурна схема САК

Щоб звести схему малюнка 6.9 до виду елементарної ланки, необхідно виконати ряд перетворень:
а) перетворення зустрічно-паралельного з'єднання ланок 1 та 2 з передатною функцією:

$$W_I(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)};$$

б) послідовне з'єднання ланок (рисунок 3.9):



Малюнок 3.9 - Схема проміжних перетворень

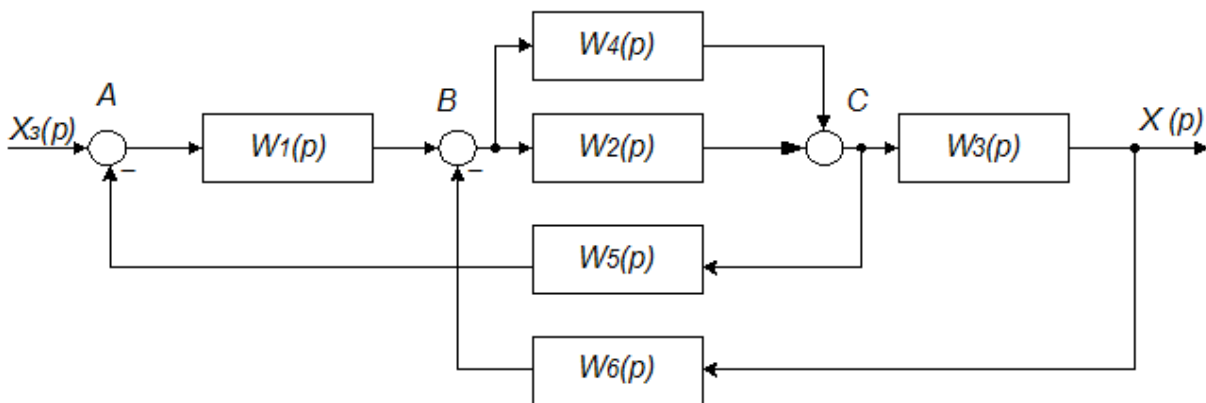
$$W_{\text{Посл}}(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)} \cdot W_3(p) = W_I(p) \cdot W_3(p);$$

в): зустрічно-паралельне з'єднання ланок

$$W_{3C}(p) = \frac{W_{\text{посл}}(p)}{1 - W_4(p) \cdot W_{\text{посл}}(p)} = \frac{W_1(p) \cdot W_3(p)}{1 - W_4(p) \cdot W_1(p) \cdot W_3(p)}.$$

Перетворення багатоконтурних САК

Перетворити структурну схему САК (рисунок 3.10), що містить ланки з відомими передатними функціями, до схеми з однією еквівалентною ланкою.

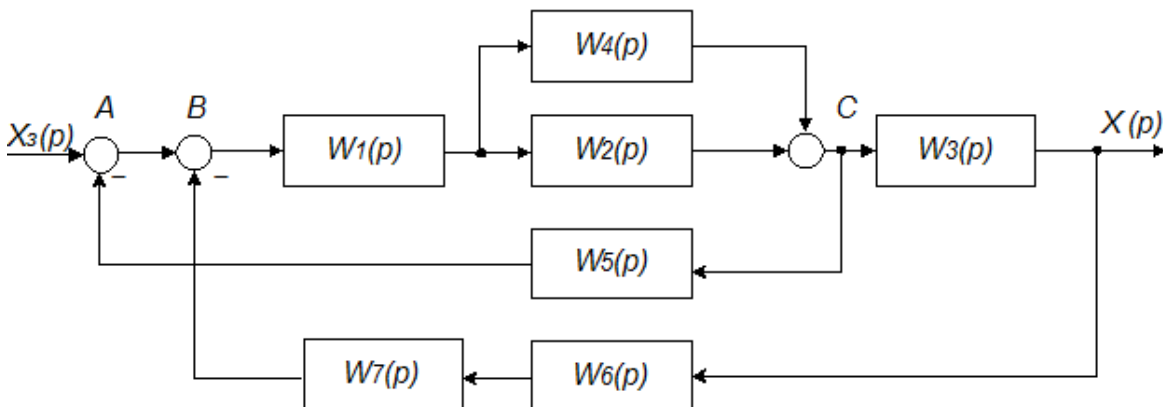


Малюнок 3.10 – Початкова структурна схема САК

Відповідно до правил перетворення дану схему необхідно звести до елементарної ланки, виконавши ряд переносів вузлів підсумовування та точок розгалуження.

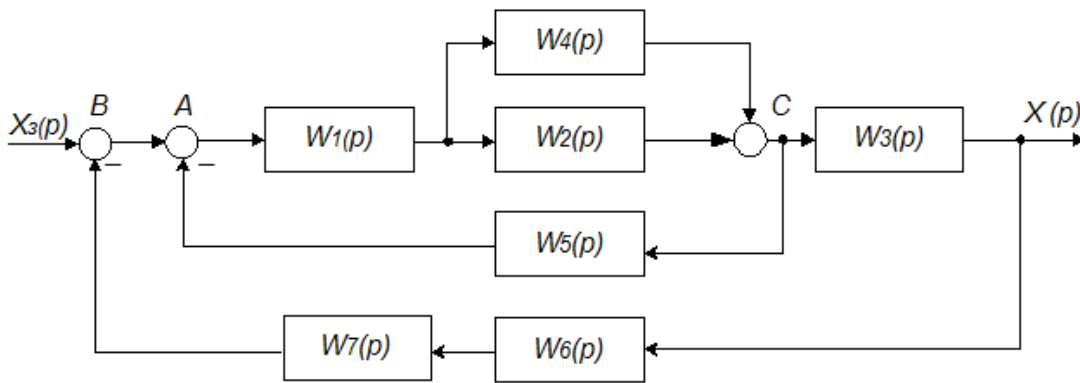
Здійснимо перенесення суматора через ланку 1 назад (малюнок 3.11) і отримаємо передатну функцію

$$W_7(p) = \frac{1}{W_2(p)}.$$



Малюнок 3.11 – Перший крок перетворення схеми

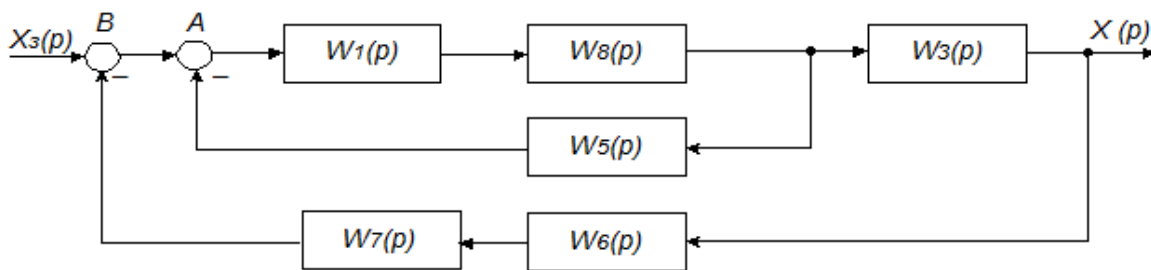
Далі виконаємо перестановку суматорів А та В (малюнок 3.12).



Малюнок 3.12 – Другий крок перетворення схеми

Далі здійснимо заміну паралельного з'єднання ланок 2 і 4, отримавши передатну функцію (малюнок 3.13):

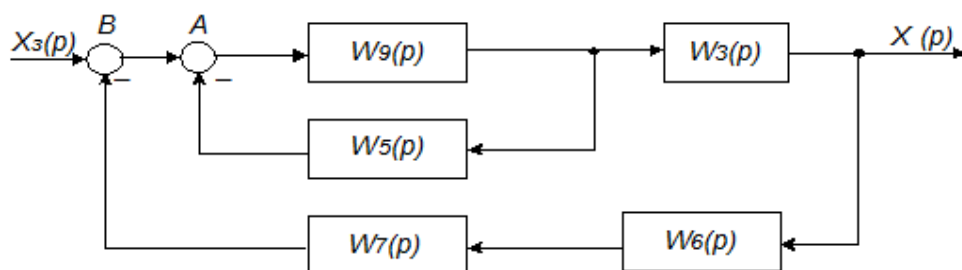
$$W_8(p) = W_2(p) + W_4(p).$$



Малюнок3.13– Третій крок перетворення схеми

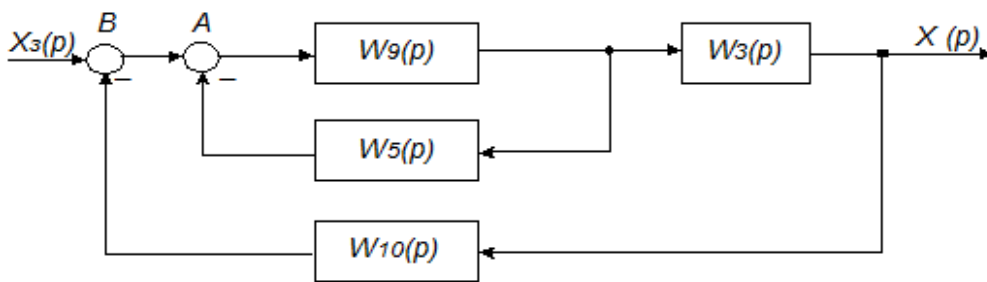
Виконаємо заміну послідовного з'єднання ланок 1 та 8, отримавши передатну функцію (малюнок3.14):

$$W_9(p) = W_1(p)W_8(p).$$



Малюнок 3.14– Четвертый шаг преобразования схемы

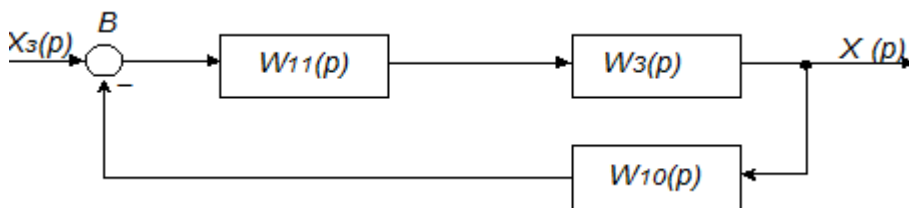
Здійснимо заміну послідовного з'єднання ланок 6 і 7, вивівши передатну функцію (малюнок 3.15):
 $W_{10}(p) = W_6(p)W_7(p).$



Малюнок 3.15 – П'ятий крок перетворення схеми

Далі зробимо заміну зустрічно-паралельного з'єднання ланок 5 і 9. Передаточна функція даного перетворення (малюнок 3.16) набуде вигляду:

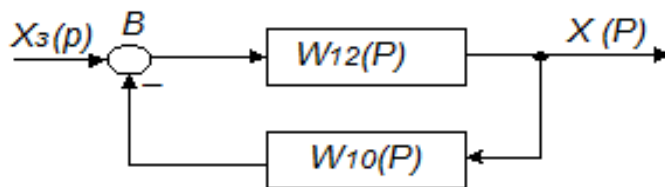
$$W_{11}(p) = \frac{W_9(p)}{1 + W_9(p)W_5(p)}.$$



Малюнок 3.16– Шостий крок перетворення схеми

Виконаємо заміну послідовного з'єднання ланок 3 та 11, що призведе до передавальної функції (малюнок 3.17):

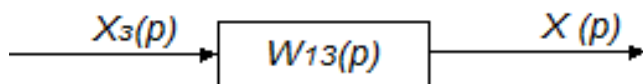
$$W_{12}(p) = W_3(p)W_{11}(p).$$



Малюнок 3.18 – Сьомий крок перетворення схеми

Остаточним кроком перетворення буде виконано заміну зустрічно-паралельного з'єднання ланок 10 і 12 з передавальною функцією виду (малюнок 3.19):

$$W_{13}(p) = \frac{W_{12}(p)}{1 + W_{12}(p)W_{10}(p)}.$$



Малюнок 3.19 – Восьмий крок перетворення схеми

Таким чином, вихідна структурна схема (малюнок 3.19) перетворена до однієї еквівалентної ланки. У разі, коли кожна з передавальних функцій представлена додатково відповідним виразом в операторній формі, для отримання кінцевої передавальної функції замкнутої системи необхідно виконати підстановку виразів і здійснити необхідні еквівалентні математичні перетворення.

ДОСЛІДЖЕННЯ САУ НА СТІЙКІСТЬ ЗА КРИТЕРІЄМ ГУРВІЦА

Виконаємо дослідження САК, яка описується рівнянням третього порядку з однією змінною параметром K :

$$p^3 + 3p^2 + 3p + K = 0.$$

Скористаємося критерієм Гурвіца. Відповідно до нього повинні виконуватися умови, необхідні та достатні умови критерію Гурвіца

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1 > 0; \\ \Delta_1 &= a_1 = 3 > 0; \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 3 \cdot 3 - 1 \cdot K > 0; \\ \Delta_3 &= a_3 \Delta_2 = 3 \Delta_2 > 0. \end{aligned} \right\}$$

Звідки область стійкості

$$0 < K < 9.$$

Визначимо так само, наприклад, область стійкості САК, що описується характеристичним рівнянням третього порядку з двома параметрами T_1 і K_1 , що варіюються.

$$p^3 + 3p^2 + T_1 p + K_1 = 0.$$

Скористаємося критерієм Гурвіца, згідно з яким повинні виконуватися необхідні та достатні умови

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1 > 0; \\ \Delta_1 &= a_1 = 3 > 0; \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 3 \cdot T_1 - 1 \cdot K_1 > 0; \\ \Delta_3 &= a_3 \Delta_2 = T_1 \Delta_2 > 0. \end{aligned} \right\}$$

Звідки область стійкості

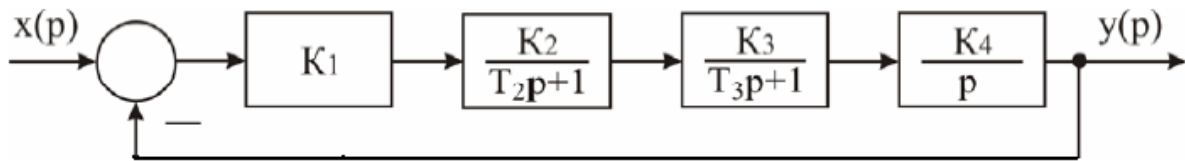
$$0 < K_1 < 3T_1.$$

У графічному вигляді ця сфера стійкості представлена на малюнку 3.20.



Малюнок 3.20 – Область стійкості САУ у просторі двох параметрів

Для САУ, поданої на малюнку 3.21, виконати дослідження на стійкість за критерієм Гурвіца. Для САУ прийняті такі значення коефіцієнтів посилення та постійних часу : $K_1=2$, $K_2=0,6$, $K_3=10$, $K_4=4$, $T_2=0,1$ с, $T_3=0,5$ с.



Малюнок 3.21 – Структурна схема досліджуваної САК

Для визначення стійкості за критерієм Гурвіца знаходимо характеристичний поліном замкнутої системи $Q(p)$:

$$W_{3C}(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{W_{\text{ПР}}(p)}{1 + W_{\text{ПР}}(p)W_{\text{ОС}}(p)} = \frac{K_1 \cdot \frac{K_2}{T_2p+1} \cdot \frac{K_3}{T_3p+1} \cdot \frac{K_4}{p}}{1 + K_1 \cdot \frac{K_2}{T_2p+1} \cdot \frac{K_3}{T_3p+1} \cdot \frac{K_4}{p} \cdot 1} =$$

$$= \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4}{p(T_2p+1)(T_3p+1) + K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4} = \frac{K_{\text{РАЗ}}}{T_2T_3p^3 + (T_2+T_3)p^2 + p + K_{\text{РАЗ}}}.$$

$$Q(p) = T_2T_3p^3 + (T_2 + T_3)p^2 + p + K_{\text{РАЗ}}.$$

Оскільки досліджувана система третього порядку $n=3$, то визначення стійкості САК необхідно, щоб по-перше, всі коефіцієнти мали той самий знак, як і перший коефіцієнт a_0 , а, по-друге, щоб головний визначник Гурвіца і його діагональні мінори теж мали той самий знак. У даному рівнянні коефіцієнти характеристичного рівняння $Q(p)$ позитивні:

$$a_0 = T_2 \cdot T_3 = 0,1 \cdot 0,5 = 0,05 > 0,$$

$$a_1 = T_2 + T_3 = 0,1 + 0,5 = 0,6 > 0,$$

$$a_2 = 1 > 0,$$

$$a_3 = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 = K_{\text{РАЗ}} = 2 \cdot 0,6 \cdot 10 \cdot 4 = 48 > 0.$$

Таким чином, перша умова виконується.

Запишемо і знайдемо головний визначник Гурвіца і всі його діагональні мінори.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} - \text{головний визначник Гурвіца.}$$

$$\Delta_1 = |a_1| = |0,6| = 0,6 > 0.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,6 & 48 \\ 0,05 & 1 \end{vmatrix} = 0,6 \cdot 1 - 0,05 \cdot 48 = -1,8 < 0.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,6 & 48 & 0 \\ 0,05 & 1 & 0 \\ 0 & 0,6 & 48 \end{vmatrix} = a_3 \cdot \Delta_2 = 48 \cdot (-1,8) = -86,4 < 0.$$

Друга умова не виконується. Таким чином, САК, що розглядається, нестійка.

Знайдемо значення коефіцієнта розімкнутої системи, у якому аналізована САК буде стійкою. Такий коефіцієнт називається граничним коефіцієнтом посилення. Граничні параметри САК визначаються за умови знаходження її на межі стійкості, тобто $\Delta_1 = 0$.

Тоді характеристичне рівняння набуде вигляду:

$$Q(p) = T_2 T_3 p^3 + (T_2 + T_3) p^2 + p + K_{PA3} = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + K_{ПРЕД}.$$

З головного визначника Гурвіца та його другого діагонального мінору Δ_2 (оскільки коефіцієнт $a_3 = K_{ПРЕД}$ існує в ньому) визначимо чисельне значення $K_{ПРЕД}$:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & K_{ПРЕД} \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,6 & K_{ПРЕД} \\ 0,05 & 1 \end{vmatrix} = 0,6 \cdot 1 - 0,05 \cdot K_{ПРЕД} \leq 0.$$

$$K_{ПРЕД} = \frac{-(0,6 \cdot 1)}{-0,5} = 12.$$

Таким чином, щоби САК була стійкою необхідно, щоб $K^{PA3} < 12$.

Припустимо, що $K_{PA3} = a_3 = 11 < 12$.

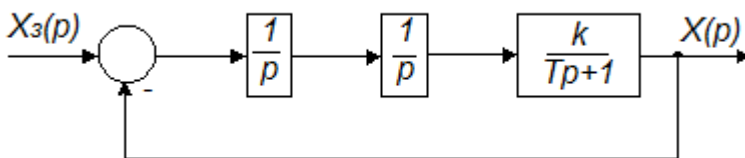
$$\Delta_1 = |a_1| = |0,6| = 0,6 > 0.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,6 & 11 \\ 0,05 & 1 \end{vmatrix} = 0,6 \cdot 1 - 0,05 \cdot 11 = 0,05 > 0.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,6 & 11 & 0 \\ 0,05 & 1 & 0 \\ 0 & 0,6 & 11 \end{vmatrix} = a_3 \cdot \Delta_2 = 11 \cdot 0,05 = 0,55 > 0.$$

Друга умова виконується, отже, САК є стійкою.

Відомо, що стійкість САК залежить як від виду її характеристичного рівняння, так і від конкретних числових значень коефіцієнтів рівняння. Існують системи, які нестійкі до будь-яких значень параметрів. Такі системи називають структурно нестійкими. Структурно нестійку систему можна зробити стійкою лише змінивши її структуру. У структурно нестійкій системі у просторі будь-яких її параметрів області стійкості немає. Такою, наприклад, є САК, структурна схема якої наведена малюнку 3.22. У ній T і k – відповідно постійна часу та передавальний коефіцієнт інерційної ланки.



Малюнок 3.22 – Структурна схема структурно нестійкої САУ

Характеристичне рівняння такої системи має вигляд

За критерієм Гурвіца повинні виконуватись умови стійкості

$$Tp^3 + p^2 + k = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= T > 0; \\ \Delta_1 &= a_1 = 1 > 0; \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 1 \cdot 0 - T \cdot k = -T \cdot k > 0; \\ \Delta_3 &= a_3 \Delta_2 = k \Delta_2 > 0. \end{aligned} \right\}$$

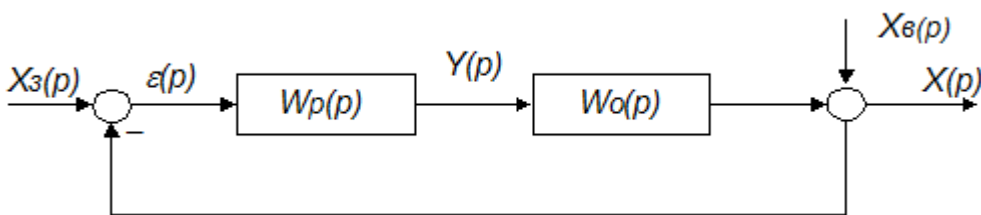
Однак за жодних значень постійної часу T і передатного коефіцієнта k визначник Δ_2 не може бути позитивним. Тому система, що розглядається, є структурно нестійкою.

Існують загальні рекомендації щодо впливу на структурну стійкість одноконтурної ТАК:

а) ланки, що зменшують інерційність системи, сприяють її стійкості (наприклад, ланка першого порядку, що форсує);

б) ланки, що збільшують інерційність системи, сприяють її нестійкості (наприклад, ідеальні інтегруючі та коливальні ланки).

Розглянемо вплив однієї з основних параметрів одноконтурної САУ (рисунок 6.23) – передавального коефіцієнта розімкнутої ТАК її стійкість.

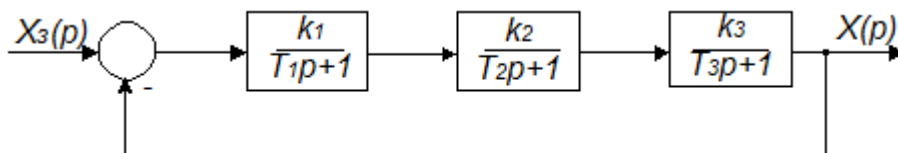


Малюнок 3.23 – Узагальнена алгоритмічна схема

Чим цей коефіцієнт більший, тим більш різко змінюються сигнали й впливу у системі, тобто . її вільний рух відбувається з більшою частотою. Наслідком цього є більше запізнення фазою сигналу зворотного зв'язку (керованої величини) по відношенню до сигналу помилки. При певному передатному коефіцієнті зворотний зв'язок починає працювати як позитивний і призводить до розгойдування системи, т. е. до нестійкості системи.

Таким чином, встановлена загальна закономірність: чим більший передавальний коефіцієнт розімкнутої САК, тим ближче замкнута САК до межі стійкості.

Граничне значення передавального коефіцієнта розімкнутої САК залежить від співвідношення постійних часу ланок, що утворюють контур системи. Розглянемо, наприклад, статичну САК, що складається з трьох інерційних ланок першого порядку з передатними коефіцієнтами k_1, k_2, k_3 та постійними часу T_1, T_2, T_3 , алгоритмічна схема якої наведена на малюнку 3.24.



Малюнок 3.24 – Структурна схема одноконтурної статичної САК

Передатна функція розімкнутої САК, коли зворотний зв'язок розімкнута, матиме вигляд:

$$W(p) = \frac{k_1 k_2 k_3}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)} = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)},$$

де k - передавальний коефіцієнт розімкнутої системи.

Характеристичне рівняння замкнутої системи – знаменник передавальної функції:

$$(T_1 p + 1) (T_2 p + 1) (T_3 p + 1) + k = 0$$

або

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0,$$

де $a_0 = T_1 T_2 T_3$;

$a_1 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3$;

$a_2 = T_1 + T_2 + T_3$;

$a_3 = 1 + k$.

Згідно з критерієм Гурвіца система третього порядку буде перебувати на межі стійкості при $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0$.

Підставляючи у попередній вираз загальні значення коефіцієнтів a_0, a_1, a_2, a_3 , отримуємо

$$(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) (T_1 + T_2 + T_3) - T_1 T_2 T_3 (1 + k_{np}) = 0.$$

Вирішуючи це рівняння, отримуємо потрібне значення граничного коефіцієнта

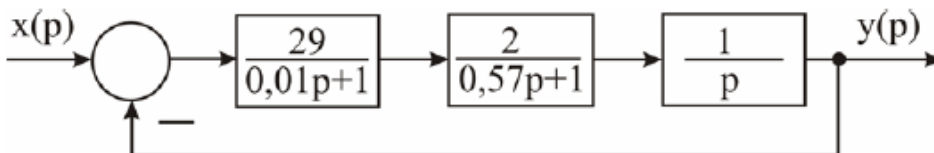
$$k_{np} = 2 + \frac{T_1}{T_2} + \frac{T_1}{T_3} + \frac{T_2}{T_1} + \frac{T_2}{T_3} + \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_3}{T_2}.$$

Аналіз даної залежності дозволяє говорити, що граничний коефіцієнт тим більше, чим більше різницю між двома постійними часу, що найбільш розрізняються (наприклад, T_1 і T_2) і чим ближче третя постійна часу (T_3) до середньоарифметичного значення двох перших.

ДОСЛІДЖЕННЯ САУ НА СТІЙКІСТЬ ЗА КРИТЕРІЄМ МИХАЙЛОВА

Визначити стійкість системи за критерієм Михайлова, структурна схема якої представлена малюнку 3.25.

.



Малюнок 3.25 – Структурна схема досліджуваної САУ

Записуємо передатну функцію замкнутої системи та знаходимо її характеристичний поліном $Q(p)$:

$$\begin{aligned} W_{3C}(p) &= \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{W_{IP}(p)}{1 + W_{IP}(p) \cdot W_{OC}(p)} = \frac{\frac{29}{0,01p+1} \cdot \frac{2}{0,57p+1} \cdot \frac{1}{p}}{1 + \frac{29}{0,01p+1} \cdot \frac{2}{0,57p+1} \cdot \frac{1}{p} \cdot 1} = \\ &= \frac{29 \cdot 2 \cdot 1}{p + (0,01p+1) \cdot (0,57p+1) + 29 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{58}{0,0057p^3 + 0,58p^2 + p + 58}. \end{aligned}$$

$$Q(p) = 0,0057 \cdot p^3 + 0,58p^2 + p + 58 = 0.$$

Замінюємо в характеристичний поліном оператор диференціювання p на $j\omega$

$$Q(j\omega) = 0,0057 \cdot (j\omega)^3 + 0,58(j\omega)^2 + (j\omega) + 58 = 0.$$

$$j = -1, j^2 = -1, j^3 = -j, j^4 = 1 \text{ и}$$

$$Q(j\omega) = -0,0057 \cdot j\omega^3 - 0,58 \cdot \omega^2 + j\omega + 58 = 0.$$

Виділяємо дійсну частину $U(\omega)$ і уявну частину $V(\omega)$, прирівнюємо їх до нуля.

$$U(\omega) = -0,58 \cdot \omega^2 + 58 = 0,$$

$$jV(\omega) = -0,0057 \cdot \omega^3 + \omega = 0.$$

Знаходимо коріння рівнянь, які є частотами перетину годографа Михайлова з дійсною та уявною осями:

$$U(\omega) = -0,58 \cdot \omega^2 + 58 = 0,$$

$$jV(\omega) = -0,0057 \cdot \omega^3 + \omega = 0,$$

$$-0,58 \cdot \omega^2 = -58 \omega(-0,0057 \cdot \omega^2 + 1) = 0,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{58}{0,58}} = 10 \text{ рад/с},$$

$$\omega = 0 \text{ рад/с},$$

$$-0,0057 \cdot \omega^2 = -1,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{0,0057}} = 13,2 \text{ рад/с}.$$

Щоб дізнатися стійка замкнута система без побудови годографа Михайлова необхідно, щоб виконувалася умова чергування частот, тобто: $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \omega_5 \dots$

Так як годограф завжди починається на позитивній речовинній осі при $\omega = 0$ (перший найменший корінь уявної частини при $V(\omega_0) = 0$), то при поступовому збільшенні частоти від нуля до нескінченності повинна звертатися в нуль спочатку речовинна частина $U(\omega) = 0$ (перший найменший корінь речовинної частини при $U(\omega)$ коріння, що залишилося, корінь уявної частини при $V(\omega_2) = 0$), потім знову речовинна частина (найменший з коренів, що залишилися, корінь речовинної частини при $U(\omega_3) = 0$) і так далі.

У цьому випадку розподілимо коріння у порядку:

$$\omega_0 = 0 \text{ (при } V(\omega_0) = 0),$$

$$\omega_1 = 10 \text{ рад/с (при } U(\omega) = 0),$$

$$\omega_2 = 13,2 \text{ рад/с (при } V(\omega_0) = 0).$$

Таким чином, умова $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2$ виконується. Значить замкнута САК стійка. На підтвердження розрахунків збудуємо годограф Михайлова (малюнок 3.26).

Знайдемо значення дійсної $U(\omega)$ і уявної частин $V(\omega)$ для частот $\omega = 0 \div 15$ рад/с (оскільки найбільша частота перетину годографа з віссю координат дорівнює $\omega_2=13,2$ рад/с).

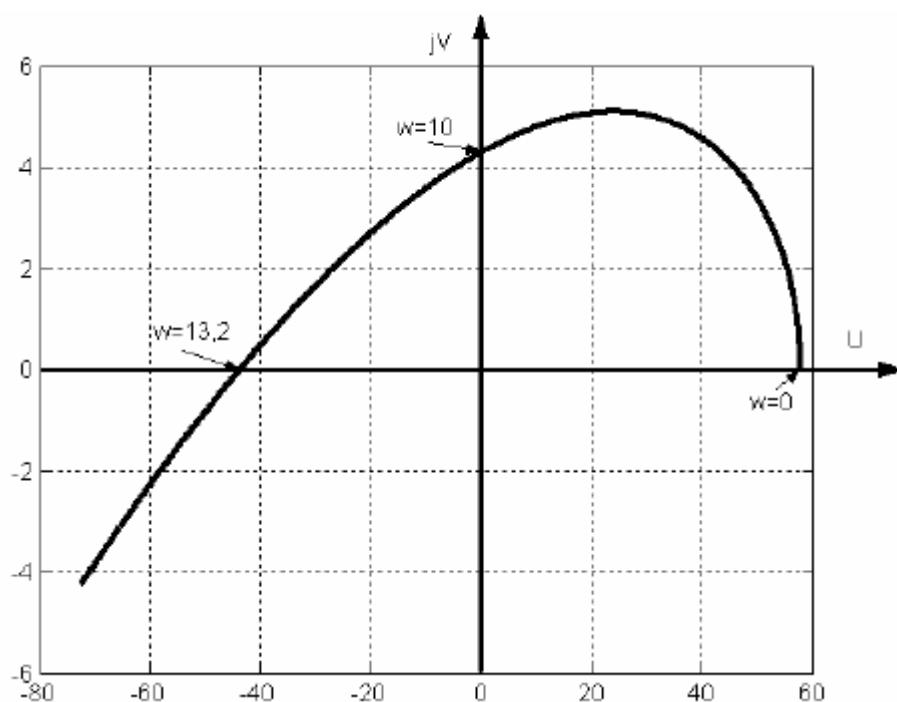
Розраховані вище значення частот перетину годографа з дійсною і уявною осями виділені в таблиці жирно.

Таблиця Розрахункові параметри для побудови годографа Михайлова

ω	0	5	8	10	12,5	13,2	14	15
$X(\omega)$	58	43,5	20,9	0	-32,6	-43	-55,6	-72,5
$Y(\omega)$	0	4,3	5	4,3	1,4	0	-1,6	-4,2

За результатами таблиці збудуємо годограф Михайлова.

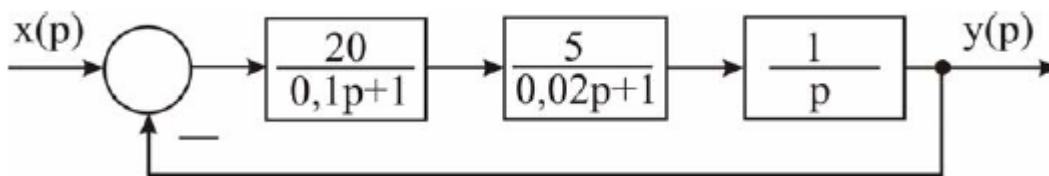
З малюнка 3.26 видно, що замкнута САК стійка, так як характеристичне рівняння третього порядку та крива годографа, починається на позитивній дійсній півосі і огинає проти годинникової стрілки початок координат, проходячи послідовно три квадранти.



Малюнок 3.26 – Годограф Михайлова

ДОСЛІДЖЕННЯ САК НА СТІЙКІСТЬ ЗА КРИТЕРІЄМ НАЙКВІСТА

Визначити стійкість електромеханічної системи, структурна схема якої представлена малюнку 3.27, використовуючи критерій стійкості Найквіста



Малюнок 3.27 – Початкова структурна схема САУ

Для цієї системи отримаємо передатну функцію розімкнутої системи:

$$W_{PA3}(p) = W_{П}(p) \cdot W_{OC}(p) = \frac{20}{0,1p+1} \cdot \frac{5}{0,02p+1} \cdot \frac{1}{p} \cdot 1 = \frac{100}{p(0,1p+1)(0,02p+1)}.$$

З передавальної функції видно, що всі корені знаменника, крім одного нульового кореня, лежить у лівій напівплощині. Тому в стійкій системі амплітудно-фазова характеристика (АФХ) не повинна охоплювати точку $(-1, j0)$. Для визначення АФХ розімкнутої системи визначимо амплітудну частотну характеристику $A(\omega) = W_{PA3}(j\omega)$ та фазову частотну характеристику $\phi(\omega) = \arg|W_{PA3}(j\omega)|$.

Щоб отримати передатну частотну функцію $W(j\omega)$, необхідно замінити оператор диференціювання p на $j\omega$:

$$W_{PA3}(j\omega) = \frac{100}{j\omega(0,1j\omega+1)(0,02j\omega+1)}.$$

Розкриваємо дужки у знаменнику та виконуємо тотожні перетворення:

$$W_{PA3}(j\omega) = \frac{100}{0,002(j\omega)^3 + 0,12(j\omega)^2 + j\omega} = \frac{100}{-j0,002\omega^3 - 0,12\omega^2 + j\omega}.$$

Групуємо складові в знаменнику з уявною одиницею j :

$$W_{PA3}(j\omega) = \frac{100}{-j0,002\omega^3 - 0,12\omega^2 + j\omega} = \frac{100}{-0,12\omega^2 + j(\omega - 0,002\omega^3)} = \frac{100}{\alpha \pm j\beta}.$$

Помножимо чисельник і знаменник частотної передавальної функції комплексне пов'язане число знаменника, тобто. для $-\alpha + j\beta$ комплексне сполучене число буде $-\alpha - j\beta$.

$$\begin{aligned} W_{PA3}(j\omega) &= \frac{100}{-0,12\omega^2 + j(\omega - 0,002\omega^3)} \cdot \frac{-0,12\omega^2 - j(\omega - 0,002\omega^3)}{-0,12\omega^2 - j(\omega - 0,002\omega^3)} = \\ &= \frac{-12\omega^2 - j100(\omega - 0,002\omega^3)}{(-0,12\omega^2)^2 - (j(\omega - 0,002\omega^3))^2} = \frac{-12\omega^2 - j100(\omega - 0,002\omega^3)}{0,0144\omega^4 + (\omega - 0,002\omega^3)^2}. \end{aligned}$$

Виділимо окремо дійсну $U(\omega)$ та уявну частини $V(\omega)$ частотної передавальної функції:

$$U(\omega) = \frac{-12\omega^2}{0,0144\omega^4 + (\omega - 0,002\omega^3)^2},$$

$$V(\omega) = j \frac{-100(\omega - 0,002\omega^3)}{0,0144\omega^4 + (\omega - 0,002\omega^3)^2}.$$

Записуємо вираз визначення амплітудної частотної характеристики:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)},$$

$$A(\omega) = \sqrt{\left(\frac{-12\omega^2}{0,0144\omega^4 + (\omega - 0,002\omega^3)^2}\right)^2 + \left(j\frac{-100(\omega - 0,002\omega^3)}{0,0144\omega^4 + (\omega - 0,002\omega^3)^2}\right)^2}.$$

Фазова частотна характеристика розімкнутої системи записується як сума фазових характеристик типових ланок, у тому числі вона складається. Структурна схема малюнка 3.27 включає дві аперіодичні ланки першого порядку та одну інтегруючу.

Фазові частотні характеристики:

а) для аперіодичного ланки першого порядку $A_1(j\omega) = -\arctg(\omega T)$;

б) для інтегруючої ланки $\phi(j\omega) = -\pi/2$.

З урахуванням цього, записуємо вираз для фазової характеристики системи, що розглядається:

$$\varphi_{\text{РАЗ}}(j\omega) = -90^\circ - \arctg 0,1\omega - \arctg 0,02\omega.$$

Фазова частотна характеристика розімкнутої системи записується як сума фазових характеристик типових ланок, у тому числі вона складається. Структурна схема малюнка 3.27 включає два аперіодичні ланки першого порядку та одну інтегруючу.

Фазові частотні характеристики:

а) для аперіодичного зв'язку першого порядку $A_1(j\omega) = -\arctg(\omega T)$;

б) для інтегруючої ланки $\phi(j\omega) = -\pi/2$.

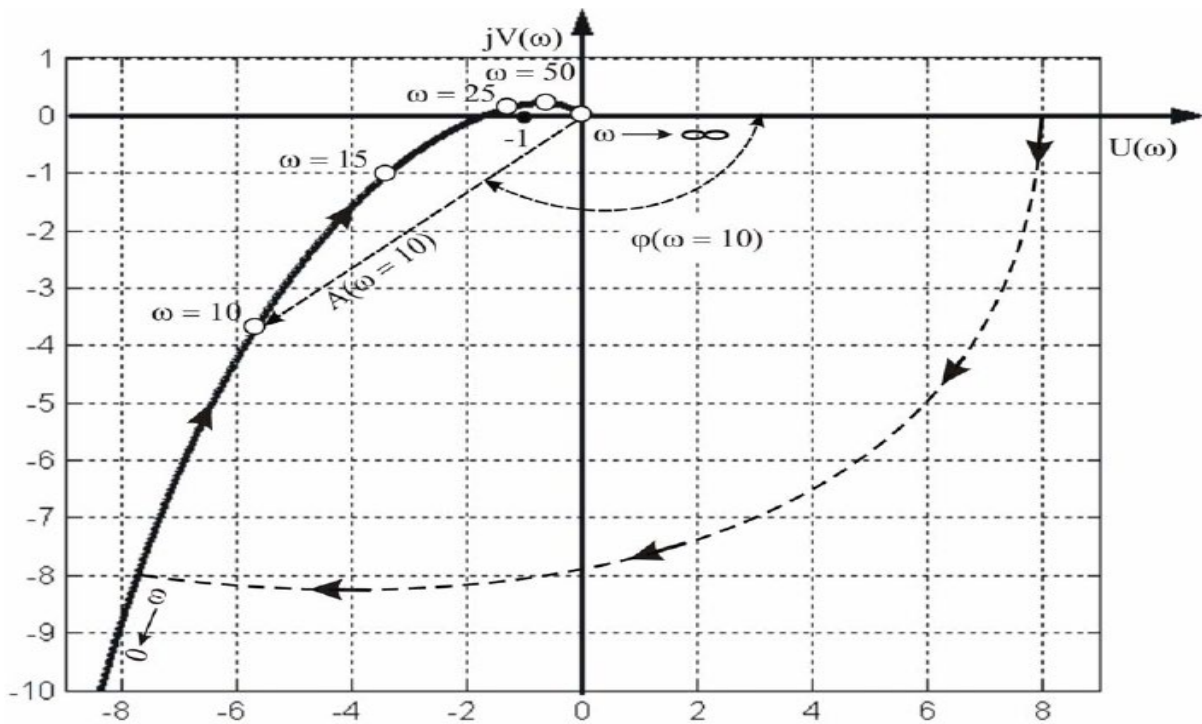
З урахуванням цього, записуємо вираз для фазової характеристики системи, що розглядається:

Таблиця. Фазові характеристики

ω , рад/с	0	5	10	15	25	50	75	100
$U(\omega)$	∞	-9,5	-5,8	-3,4	-1,3	-0,23	-0,064	-0,024
$V(\omega)$	0	-15,05	-3,8	-1	0,11	0,15	0,07	0,04
$A(\omega)$	∞	18	6,9	3,54	1,32	0,28	0,1	0,044
$\varphi(\omega)$	-90°	-122°	-146°	-163°	-184°	-214°	-228°	-238°

За даними таблиці будемо АФХ розімкнутої системи (рисунок 3.28). Так як знаменник передавальної функції системи має нульовий корінь, то розглянута слідча система є астатичної першого порядку. Отже, доповнимо дугою кола нескінченно великого радіусу гілка АФХ, що відповідає частоті при $\omega = 0$, яка йде в нескінченність так, щоб вектор $W_{\text{РАЗ}}(j\omega)$ повернувся за годинниковою стрілкою на кут, рівний 90° .

З малюнка 3.28 видно, що АФХ розімкнутої системи охоплює точку $(-1, j0)$.



Малюнок 3.28 – АФХ розімкнутої САУ

Отже, замкнута система нестійка.

Перевіримо справедливність цього твердження будь-яким із відомих критеріїв, наприклад, алгебраїчним критерієм Гурвіца.

Запишемо за структурною схемою передатну функцію замкнутої системи:

$$\begin{aligned}
 W_{ЗС}(p) &= \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{W_{ПР}(p)}{1 + W_{ПР}(p)W_{ОС}(p)} = \frac{\frac{20}{0,1p+1} \cdot \frac{5}{0,02p+1} \cdot \frac{1}{p}}{1 + \frac{20}{0,1p+1} \cdot \frac{5}{0,02p+1} \cdot \frac{1}{p} \cdot 1} = \\
 &= \frac{\frac{100}{p(0,1p+1)(0,02p+1)}}{1 + \frac{20}{0,1p+1} \cdot \frac{5}{0,02p+1} \cdot \frac{1}{p}} = \frac{\frac{100}{p(0,1p+1)(0,02p+1)}}{\frac{p(0,1p+1)(0,02p+1) + 100}{p(0,1p+1)(0,02p+1)1}} = \\
 &= \frac{100}{p(0,1p+1)(0,02p+1)100} = \frac{100}{0,002p^3 + 0,02p^2 + p + 100}.
 \end{aligned}$$

Характеристичний поліном замкнутої системи $Q(p)$ дорівнює:

$$Q(p) = 0,002p^3 + 0,02p^2 + p + 100 = a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3.$$

Оскільки досліджувана система третього порядку $n=3$, то визначення стійкості САУ необхідно, щоб по-перше, всі коефіцієнти мали той самий знак, як і перший коефіцієнт a_0 . І, по-друге, щоб головний визначник Гурвіца та всі його діагональні мінори теж мали той самий знак.

У цьому рівнянні коефіцієнти характеристичного рівняння $Q(p)$ позитивні: $a_0 = 0,002 > 0$, $a_1 = 0,12 > 0$, $a_2 = 1 > 0$, $a_3 = 100 > 0$.

Таким чином, перша умова виконується.

Для перевірки другої умови, достатньо врахувати умову позитивності лише передостаннього мінору $\Delta_2 > 0$, оскільки аналізоване характеристичне рівняння $Q(p)$ є окремим випадком при розкритті визначника, що фігурує у загальному формулюванні критерію Гурвіца.

Запишемо і знайдемо другий діагональний мінор Гурвіца:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,12 & 100 \\ 0,002 & 1 \end{vmatrix} 11 = 0,12 \cdot 1 - 100 \cdot 0,002 = -0,08 < 0.$$

Друга умова не виконується. Таким чином, замкнута САК нестійка.
Таким чином, підтверджується правильність зробленого вище висновку.

КОРЕНЕВИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ САК НА СТІЙКІСТЬ

Розглянемо деяку замкнуту САУ, властивості якої описуються характерним поліномом:

$$Q(p) = p^3 - p^2 + 3p + 5.$$

Визначити по корінням характеристичного полінома чи стійка САУ, якщо відомо, що один з коренів рамен $p_1 = -1$. Побудувати коріння на комплексній площині.

Для визначення стійкості САК необхідно визначити значення двох інших коренів характеристичного полінома. І тому задане рівняння потрібно розділити на $(p - p_1)$.

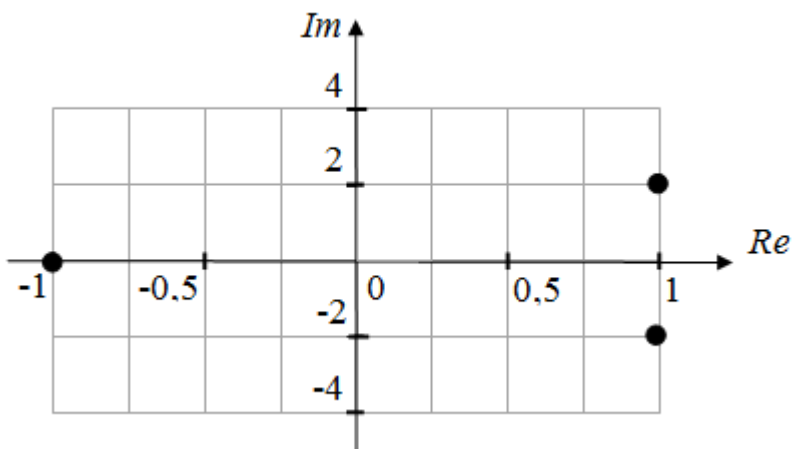
$$\begin{array}{r|l} -p^3 - p^2 + 3p + 5 & p+1 \\ \underline{p^3 - p^2} & p^2 - 2p + 5 \\ -2p^2 + 3p & \\ \underline{-2p^2 - 2p} & \\ 5p + 5 & \\ \underline{5p + 5} & \\ 0 & \end{array}$$

Вирішуючи отримане квадратне рівняння $p^2 - 2p + 5 = 0$, отримуємо, що коріння рівняння наступне:

$$p_2 = 1 - j2,$$

$$p_3 = 1 + j2.$$

Так як коріння має позитивну дійсну частину, то за іншою теоремою Ляпунова система буде нестійкою, а розташування коренів на комплексній площині наведено на малюнку 3.29.



Малюнок 3.29 – Розташування коріння на комплексній площині

АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ ТА ПОКАЗНИКІВ ЯКОСТІ У САК

Передана функція САК у розімкнутому стані

$$W(p) = \frac{50}{p(0,05p+1)}.$$

Аналітично визначити перехідну функцію $h(t)$ та вагову функцію $w(t)$. Побудувати графіки перехідних процесів, характер яких оцінити стійкість САК. Визначити тривалість перехідного процесу $h(t)$ при входженні в зону 5% від значення для монотонного перехідного процесу (2,5% для коливального і аперіодичного перехідного процесу) і величину перерегулювання. Для вагової функції $w(t)$ визначити лише максимальне значення.

Спочатку визначимо передатну функцію замкнутої системи:

$$W_{3C}(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{\frac{50}{p(0,05p+1)}}{1 + \frac{50}{p(0,05p+1)}} = \frac{50}{0,05p^2 + p + 50}.$$

Перехідна функція у просторі Лапласа визначається:

$$H(p) = \frac{W_{3C}(p)}{p} = \frac{50}{0,05p^3 + p^2 + 50p}.$$

Щоб знайти $h(t)$, необхідно знайти зворотне перетворення Лапласа від $H(p)$, використовуючи властивості і таблицю типових перетворень. Виконаємо розкладання знаменника – характеристичного полінома на співмножники. Бажано виконати розкладання так, щоб отримати поліном стандартного вигляду. Прирівняємо знаменник до нуля і визначимо його коріння:

$$0,05p^3 + p^2 + 50p = p(0,05p^2 + p + 50) = 0,$$

$$p_1 = 0, \quad p_{2,3} = -10 \pm j30.$$

За наявності комплексно-сполученого коріння поліномів необхідно їх привести до вигляду $(p+\alpha)^2 + \beta^2$, тобто:

$$\begin{aligned} 0,05p^3 + p^2 + 50p &= 0,05(p-p_2)(p-p_3) = 0,05(p+10-j30)(p+10+j30) = \\ &= 0,05((p+10)-j30)((p+10)+j30) = 0,05((p+10)^2 - (j30)^2) = \\ &= 0,05((p+10)^2 - (30)^2). \end{aligned}$$

Тогда $H(p)$ приобретает вид:

$$H(p) = \frac{50}{0,05((p+10)^2 + 30p^2)}.$$

Отримане зображення перехідної функції є раціональним дробом, оригінал для якого не є типовим, тому такий дріб потрібно подати у вигляді суми простих раціональних дробів з невизначеними коефіцієнтами, які мають як оригінали поширені в ТАК функції часу. Розкладемо $H(p)$ на складові:

$$H(p) = \frac{50}{0,05((p+10)^2 + 30p^2)} = \frac{1000}{p((p+10)^2 + 30^2)} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2p + A_3}{(p+10)^2 + 30^2} =$$

$$= \frac{A_1((p+10)^2 + 30^2) + A_2p^2 + A_3p}{p((p+10)^2 + 30^2)} = \frac{A_1p^2 + A_2p^2 + 20A_1p + A_3p + 1000A_1}{p((p+10)^2 + 30^2)}.$$

Визначимо невідомі параметри A_1, A_2, A_3, A_4 , використовуючи коефіцієнти чисельника при ступенях оператора p :

$$p^2 \rightarrow A_1 + A_2 = 0,$$

$$p^1 \rightarrow 20A_1 + A_3 = 0, A_1 = 1, A_2 = -1, A_3 = -20,$$

$$p^0 \rightarrow 1000A_1 = 1000.$$

$H(p)$, розложена на простые дроби приобретает вид:

$$H(p) = \frac{1}{p} - \frac{p+20}{(p+10)^2 + 30^2}.$$

Згідно з типовими перетвореннями Лапласа, оригінал $h(t)$ знайдемо таким чином:

$$h(t) = L^{-1}\{H(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p} - \frac{p+20}{(p+10)^2 + 30^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{p+20}{(p+10)^2 + 30^2}\right\} =$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{p+10+10}{(p+10)^2 + 30^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{p+10}{(p+10)^2 + 30^2}\right\} -$$

$$- L^{-1}\left\{\frac{10}{(p+10)^2 + 30^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{p+10}{(p+10)^2 + 30^2}\right\} -$$

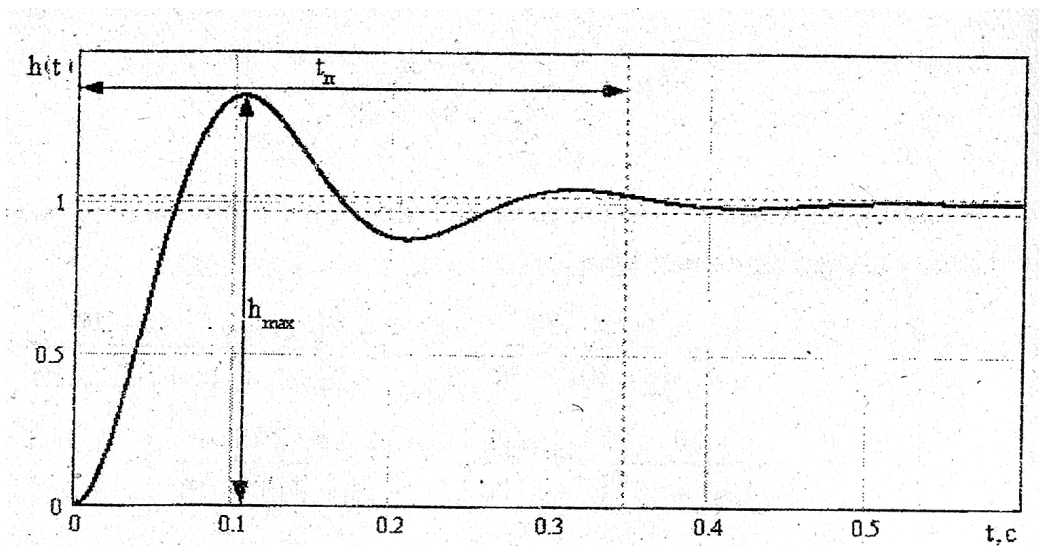
$$- 10 \frac{30}{30} L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+10)^2 + 30^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{p+10}{(p+10)^2 + 30^2}\right\} -$$

$$- \frac{1}{3} L^{-1}\left\{\frac{30}{(p+10)^2 + 30^2}\right\} = 1 - e^{-10t} \cos(30t) - \frac{1}{3} e^{-10t} \sin(30t).$$

Побудуємо графік перехідного процесу $h(t)$ при реакції САК (рисунок 3.30) на одиничний ступінчастий вплив, попередньо визначивши кілька точок перехідної функції (таблиця).

Таблиця - Точки перехідної функції

t	0,025	0,05	0,075	0,1	0,125	0,15	0,175	0,2	0,225
h(t)	0,253	0,775	1,174	1,347	1,29	1,12	0,961	0,883	0,89
t	0,25	0,275	0,3	0,325	0,35	0,375	0,4	0,425	0,45
h(t)	0,946	1,005	1,039	1,041	1,023	1,002	0,988	0,985	0,99



Малюнок 3.30 – Графік перехідної функції

За видом перехідного процесу (рисунок 3.30) можна зробити висновок, що перехідний процес при реакції САК на одиничний ступінчастий вплив буде коливальним.

Визначимо час перехідного процесу:

$$t_p = 0,348 \text{ с.}$$

Перерегулювання визначимо, встановивши максимальне значення:

$$\sigma = ((h_{\max} - h_{\text{уст}}) / h_{\text{уст}}) \cdot 100\% = ((1,35 - 1) / 1) \cdot 100\% = 35\%.$$

Для визначення вагової функції $w(t)$ необхідно здійснити зворотнє перетворення Лапласа для передавальної функції $W_{3C}(p)$

$$\begin{aligned} w(t) &= L^{-1}\{W_{3C}(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{50}{0,05p^2 + p + 50}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{50}{0,05((p + 10)^2 + 30^2)}\right\} = \\ &= 1000L^{-1}\left\{\frac{1}{(p + 10)^2 + 30^2}\right\} = \frac{1000}{30}L^{-1}\left\{\frac{30}{(p + 10)^2 + 30^2}\right\} = 33, (3)e^{-10t} \sin(30t). \end{aligned}$$

Побудуємо графік перехідного процесу $w(t)$ (рисунок 3.31) за реакції САУ на імпульс $\delta(t)$, попередньо обчисливши кілька точок перехідної функції (таблиця).

Таблиця - Точки вагової функції

t	0,025	0,05	0,075	0,1	0,125	0,15	0,175	0,2	0,225
w(t)	17,7	20,17	12,25	1,73	-5,46	-7,27	-4,98	-1,26	1,58
t	0,25	0,275	0,3	0,325	0,35	0,375	0,4	0,425	0,45
w(t)	2,57	1,97	0,68	-0,41	-0,89	-0,76	-0,33	0,09	0,3

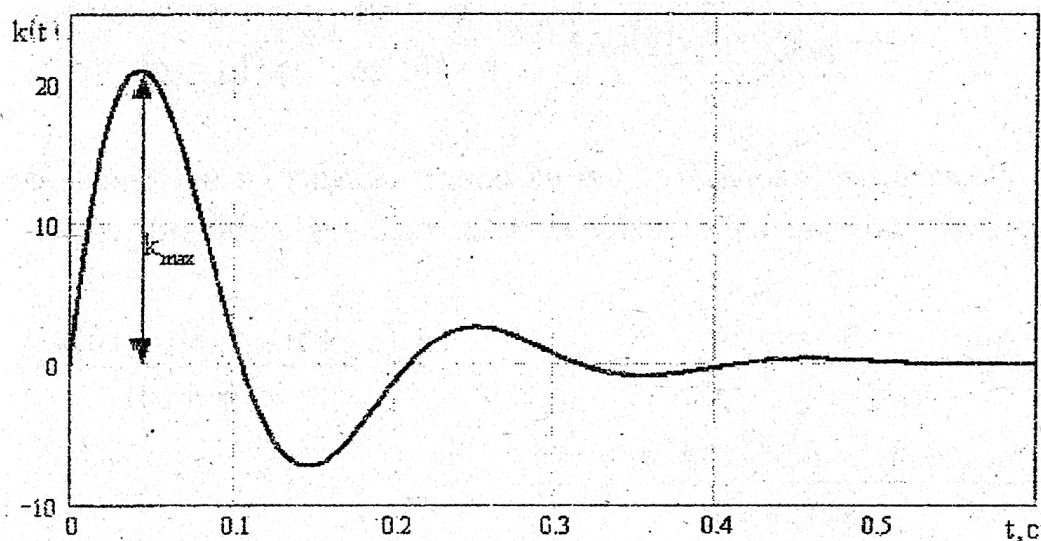
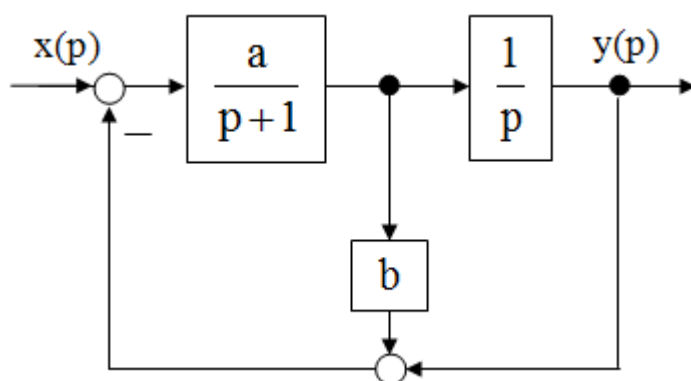


Рисунок 6.31 – Графік вагової функції

ВИЗНАЧЕННЯ ПОКАЗНИКІВ ЯКОСТІ САУ КОРЕНЕВИМ МЕТОДОМ

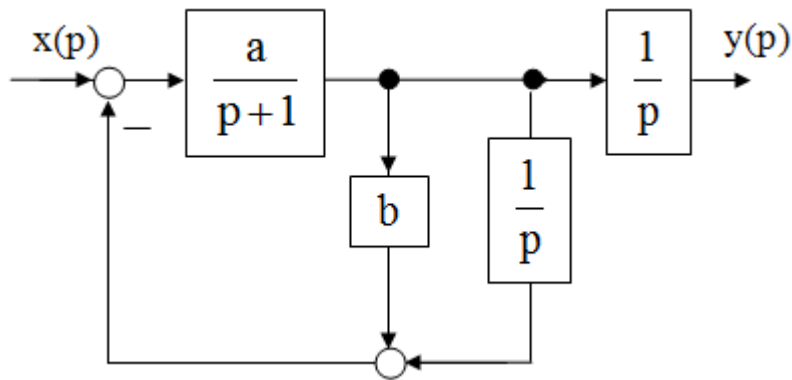
Для структурної схеми САУ (рисунок 3.32) визначити:

- передавальну функцію САУ;
- коефіцієнти a та b такі, щоб перехідний процес тривав не більше 0,3 с ($t_p = 0,3$ с) при значенні ступеня коливання $\mu = 1,3$;
- коефіцієнти a та b такі, щоб перехідний процес тривав не більше 0,3 с при значенні коефіцієнта згасання $\xi = 0,707$ та точності $\delta = 0,04$.



Малюнок 3.32 – Структурна схема САК

Для того, щоб знайти передатну функцію САУ за структурною схемою малюнка 3.32, необхідно її перетворення згідно з відомими правилами перенесення вузлів підсумовування та точок розгалуження (рисунок 3.33).



Малюнок 3.33 – Перетворення структурної схеми

Передатна функція САК може бути визначена після перетворення структурної схеми малюнка 3.33 з урахуванням паралельної, послідовної та зустрічно-паралельної сполуки:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{\frac{a}{p+1}}{1 + \frac{a}{p+1} \cdot \left(b + \frac{1}{p}\right)} \cdot \frac{1}{p} = \frac{\frac{a}{p+1}}{1 + \frac{a}{p+1} \cdot \frac{bp+1}{p}} \cdot \frac{1}{p} = \frac{\frac{a}{p+1}}{p + \frac{a(bp+1)}{p+1}},$$

$$W(p) = \frac{a}{p^2 + (ab+1)p + a}.$$

Таким чином, характеристичне рівняння САУ:

$$Q(p) = p^2 + (ab + 1)p + a.$$

Визначимо значення невідомих коефіцієнтів при $t_p = 0,3$ с та $\mu = 1,3$. Відповідно до теоретичних відомостей, очевидно, що характеристичне рівняння $Q(p)$ другого порядку та його можна привести до загального вигляду:

$$Q(p) = T^2 p^2 + 2\xi T p + 1,$$

де ξ - Коефіцієнт демпфування (загасання).

Для того, щоб САК другого порядку була коливальною ($\mu = 1,3$) коріння рівняння $Q(p) = T^2 p^2 + 2\xi T p + 1$ повинні бути комплексними виду $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ при тому, що $\beta/\alpha = 1,3$. Ступінь стійкості $\eta = \alpha$ визначимо з верхньої межі тривалості перехідного процесу:

$$t_p = \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\delta}$$

звідки

$$\alpha = \eta = \frac{\ln \frac{1}{\delta}}{t_p} = \frac{\ln \frac{1}{0,04}}{0,3} = \frac{\ln 25}{0,3} \approx 10,73,$$

$$\beta = 1,3\alpha = 13,95, \quad p_{1,2} = -10,73 \pm j13,95.$$

Визначимо коефіцієнти структурної схеми САК a та b , представивши вихідний характеристичний поліном $Q(p) = p^2 + (ab + 1)p + a$: в вигляді

$$(p - p_1)(p - p_2) = (p + 10,73 - j13,95)(p + 10,73 + j13,95) = ((p + 10,73) - j13,95)((p + 10,73) + j13,95) = (p + 10,73)^2 + 13,95^2 = p^2 + 21,46p + 309,74.$$

Звідки отримуємо:

$$a = 309,74,$$

$$b = (21,46 - 1) / 309,74 = 20,46 / 309,74 = 0,066.$$

Загасання амплітуди за період складе:

$$\zeta = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}} = 1 - e^{-\frac{2\pi}{1,3}} = 0,992 \text{ або } 99,2\%.$$

Якщо ж із показників САК відомий час регулювання $t_p = 0,3$ с і точність $\delta = 0,04$, то за наведеними раніше залежностями можна визначити дійсну частину комплексних коренів $\alpha = \eta = 10,73$. Рівняння $Q(p) = T^2 p^2 + 2\xi T p + 1$ буде відповідати аперіодичному перехідному процесу, якщо $\xi = 0,707$ ($\mu = 1$, $\delta = 4,3\%$). Тоді характеристичний поліном $Q(p)$ буде записано:

$$Q(p) = T^2 p^2 + \sqrt{2} T p + 1 = 0,$$

а корені рівняння

$$p_{1,2} = \frac{-\sqrt{2}T \pm \sqrt{2T^2 - 4T^2}}{2T^2} = \frac{-\sqrt{2}}{2T} \pm j \frac{\sqrt{2}}{2T}.$$

Звідки виходить, що $\mu = 1$ і уявна частина коренів дорівнює дійсній, тобто

$$\beta = \alpha = 10,73, p_{1,2} = -10,73 \pm j10,73.$$

Для знаходження коефіцієнтів a і b слід порівняти рівняння $Q(p) = p^2 + (ab + 1)p + a$ и $Q(p) = T^2 p^2 + 2\xi T p + 1$, при цьому перше рівняння для зручності подальших розрахунків представимо так

$$Q(p) = \frac{1}{a} p^2 + \frac{(ab+1)}{a} p + a.$$

Прирівнявши коефіцієнти обох рівнянь при однакових ступенях, отримаємо для $T = \sqrt{2}/2 \cdot 10,73 = 0,066$ с:

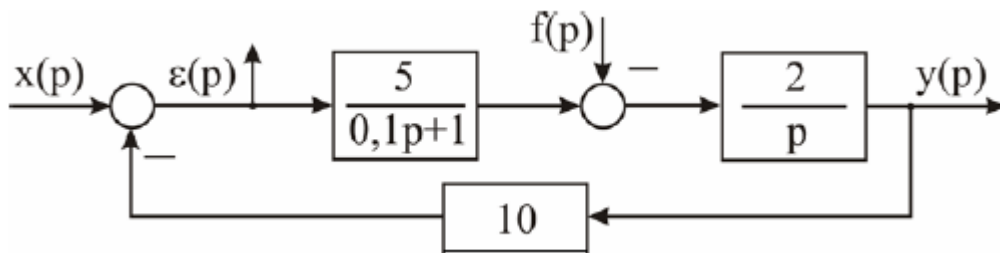
$$\frac{1}{a} = T^2 \rightarrow a = \frac{1}{T^2} = \frac{1}{0,066^2} = 230,27;$$

$$\frac{(ab + 1)}{a} = 2\xi T \rightarrow b = \frac{2\xi T a - 1}{a} = \frac{2 \cdot 0,707 \cdot 0,066 \cdot 230,27 - 1}{230,27} = 0,089.$$

Як перевірку отриманих результатів можна виконати побудову математичної моделі САК серед пакета Matlab Simulink на основі структурної моделі. Подальше моделювання та отримання графіків перехідних процесів дозволяє розрахувати показники якості САК та порівняти їх із вихідними даними.

РОЗРАХУНОК КОЕФІЦІЄНТІВ ПОМИЛКИ РЕГУЛЮВАННЯ

Розглянемо приклад для системи, структурна схема якої представлена малюнку 3.34. Визначити помилку регулювання системи $\varepsilon(p)$, при зміні вхідної величини і впливу, що обурюється, за законами $x(t) = 5 + t$ $f(t) = 10t^2 + 3$.



Малюнок 3.34 – Початкова схема САУ

Запишемо вираз для визначення помилки регулювання САК що складається з помилки регулювання за впливом $\varepsilon_x(p)$ і помилки регулювання по обурюючому впливу $\varepsilon_f(p)$:

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_x(p) + \varepsilon_f(p) = E_x(p) \cdot x(p) + E_f(p) \cdot f(p).$$

Так як закони зміни вхідних (що задає та обурює) впливів представлені в часовій області, то вираз для визначення помилки регулювання САУ матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \left(C_0 + \frac{C_1}{1!} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{C_2}{2!} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \dots + \frac{C_m}{m!} \cdot \frac{d^m x}{dt^m} \right) \cdot x(t) + \\ & + \left(C_0 + \frac{C_1}{1!} \cdot \frac{df}{dt} + \frac{C_2}{2!} \cdot \frac{d^2f}{dt^2} + \dots + \frac{C_n}{n!} \cdot \frac{d^n f}{dt^n} \right) \cdot f(t) \end{aligned}$$

Визначаємо передавальні функції замкнутих систем щодо помилки регулювання по задаючому та обурювальному впливам:

$$\begin{aligned} E_x(p) = \frac{\varepsilon(p)}{x(p)} &= \frac{1}{1 + W_{np}(p) \cdot W_{oc}(p)} = \frac{1}{1 + \frac{5}{0.1p+1} \cdot \frac{2}{p} \cdot 10} = \\ &= \frac{1}{\frac{p(0.1p+1) + 5 \cdot 2 \cdot 10}{p(0.1p+1)}} = \frac{p(0.1p+1)}{p(0.1p+1) + 100} = \frac{0.1p^2 + p}{0.1p^2 + p + 100}; \end{aligned}$$

$$E_f(p) = \frac{\varepsilon(p)}{f(p)} = \frac{W_{пр}(p)}{1 + W_{пр}(p) \cdot W_{ос}(p)} = \frac{\frac{2}{p} \cdot 10}{1 + \frac{5}{0,1p+1} \cdot \frac{2}{p} \cdot 10} =$$

$$= \frac{\frac{2}{p} \cdot 10}{\frac{p(0,1p+1) + 5 \cdot 2 \cdot 10}{p(0,1p+1)}} = \frac{20(0,1p+1)}{p(0,1p+1) + 100} = \frac{2p+20}{0,1p^2 + p + 100}.$$

Далі визначаємо коефіцієнти помилок для впливу, що задає і обурює. Кількість коефіцієнтів помилок регулювання достатньо обчислити стільки, скільки похідних не рівних нулю має вхідний вплив.

Так, для впливу, що задає:

$$x(t) = 5 + t,$$

$$x'(t) = 1 \text{ (його перша похідна),}$$

$$x''(t) = 0 \text{ (його друга похідна).}$$

Достатньо обчислити лише два коефіцієнти C_0 і C_1 , так як функція $x(t)$ має тільки одну похідну $x'(t)$, не рівну нулю.

Для впливу, що збурює:

$$f(t) = 10t^2 + 3,$$

$$f'(t) = 20t \text{ (його перша похідна),}$$

$$f''(t) = 20 \text{ (його друга похідна),}$$

$$f'''(t) = 0 \text{ (його третя похідна).}$$

Достатньо обчислити три коефіцієнти C_0 , C_1 і C_2 , так як функція $f(t)$ має дві похідних $f'(t)$ і $f''(t)$, що не дорівнює нулю.

Обчислення коефіцієнтів помилок за впливом, що задає, проводиться за відомими формулами (перший спосіб визначення), а по збурюваному впливу - розділимо багаточлен чисельника на багаточлен знаменника (другий спосіб визначення).

Для впливу, що задає:

$$C_{x0} = E_x(p) = \left(\frac{0,1p^2 + p}{0,1p^2 + p + 100} \right)_{|p=0} = 0$$

$$C_{x1} = \left(\frac{\partial E_x(p)}{\partial p} \right)_{|p=0} = \left(\frac{(2 \cdot 0,1p + 1)(0,1p^2 + p + 100) - (0,1p^2 + p)(2 \cdot 0,1p + 1)}{(0,1p^2 + p + 100)^2} \right)_{|p=0} =$$

$$= \frac{100}{(100)^2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

Для впливу, що збурює:

$$\begin{array}{l} - \frac{20+2p}{20+0,2p+0,2p^2} \\ - \frac{1,8p-0,2p^2}{1,8p+0,018p^2+0,0018p^3} \\ - \frac{0,218p^2}{-0,218p^2-0,0018p^3} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 100+p+p^2 \\ 0,2 + \frac{1,8p}{100} - \frac{0,218p^2}{100} \dots \end{array} \right.$$

$$C_{f0} = 0,2$$

$$\frac{C_{f1}}{1!} = \frac{1,8}{100} = 0,018$$

$$\frac{C_{f2}}{2!} = -\frac{0,218}{100} = -0,00218$$

Записуємо остаточний вираз помилки регулювання САК:

$$\varepsilon(t) = C_{x0} \cdot x(t) + \frac{C_{x1}}{1!} \cdot \frac{dx(t)}{dt} + C_{f0} f(t) + \frac{C_{f1}}{1!} \cdot \frac{df(t)}{dt} + \frac{C_{f2}}{2!} \cdot \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$$

Записуємо остаточний вираз помилки регулювання САК

$$\varepsilon(t) = 0 \cdot (5 + t) + 0,01 \cdot 1 + 0,2 \cdot (10t^2 + 3) + 0,018 \cdot 20t - 0,00218 \cdot 20 = 2t^2 + 0,36t + 0,5664.$$

4. ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ MATLAB В РОЗРАХУНКАХ

1. Поелементне множення векторів

```
>> a=[5 6 9];
>> b=[10 9 5];
>> a.*b
ans =
    50    54    45
>>
```

2. Створення матриці

```
>> A=[34 57 9; -2 4 7; 8 19 -1]
A =
    34    57     9
    -2     4     7
     8    19    -1
>>
```

3. Виділення заданого стовпця матриці

```
>> A(:,2)
ans =
    57
     4
    19
>>
```

4. Виділення заданого рядка матриці

```
>> A(3,:)
ans =
     8    19    -1
>>
```

5. Виділення визначника матриці

```
>> det(A)
ans =
   -2210
>>
```

6. Обчислення зворотної матриці

```
>> inv(A)
ans =
    0.0620   -0.1032   -0.1643
   -0.0244    0.0480    0.1158
    0.0317    0.0860   -0.1131
>>
```

ФУНКЦІЇ МАТЛАВ ДЛЯ СТВОРЕННЯ ПЕРЕДАВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ЛАНОК СИСТЕМИ

7. Необхідно утворити передавальну функцію

$$W(s) = \frac{0,56}{1540s^2 + 654s + 1}$$

```
>> n=[0.56];
>> m=[1540 654 1];
>> W=tf(n,m)
Transfer function:
    0.56
-----
1540 s^2 + 654 s + 1
>>
```

Функцію $W=tf(n,m)$ можна також у наступному вигляді:

```
>> W=tf([0.56],[1540,654,1])
```

Функції $pole()$ та $zero()$

8. Визначити полюси та нулі передавальної функції, отриманої у прикладі 11.

```
>> W=tf([0.56],[1540 654 1]);
>> P=pole(W)
P =
    -0.4231
    -0.0015
>>
```

9. Знайти коріння рівняння $3S^3 + 5S^2 + 7$ і корінням відновити поліном.

```
>> P=[3 5 0 7];
>> r=roots(P)
r =
    -2.1646
    0.2490 + 1.0079i
    0.2490 - 1.0079i
>> P=poly(r)
P =
    1.0000    1.6667    0.0000    2.3333
```

Функція $conv()$

10. Помножити поліноми $p(s) = 3s^2 + 5s + 7$ та $q(s) = 8s + 4$

```
>> p=[3 5 7];
>> q=[8 4];
>> G=conv(p, q)
G =
    24    52    76    28
>>
```

Або $G = 24s^3 + 52s^2 + 76s + 28$

11. Обчислити $P(s) = 5s^2 + 2s + 7$ при $s = 9$

```
>> n=[5 2 7];
>> z=polyval(n,9)
z =
    430
>>
```

Операції з передатними функціями ланок. Складання передавальних функцій

12 Скласти передавальні функції

$$W_1(s) = \frac{9}{4s^2 + 7s + 3} \quad \text{и} \quad W_2(s) = \frac{1s^2 + 10s + 43}{19s^3 + 1s^2 + 12s + 7}$$

```
>> n1=[9];
>> m1=[4 7 3];
>> q1=tf(n1,m1)
```

Transfer function:

9

```

-----
4 s^2 + 7 s + 3
>> n2=[1 10 43];
>> m2=[19 1 12 7];
>> q2=tf(n2,m2)
Transfer function:
    s^2 + 10 s + 43

```

```

-----
19 s^3 + s^2 + 12 s + 7
>> Q=q1+q2
Transfer function:
    4 s^4 + 218 s^3 + 254 s^2 + 439 s + 192

```

```

-----
76 s^5 + 137 s^4 + 112 s^3 + 115 s^2 + 85 s + 21
>>

```

Функція pz map ()

13. Подати на площині S нулі та полюси функції

```

    2 s^4 + 18 s^3 + 18 s^2 + 651 s + 78
Q(s) -----
    18 s^5 + 45 s^4 + 32 s^3 + 7 s^2 + 8 s + 418
>> n=[2 18 18 651 751];
>> m=[18 45 32 7 8 418];
>> q=tf(n, m)

```

```

Transfer function:
    2 s^4 + 18 s^3 + 18 s^2 + 651 s + 751

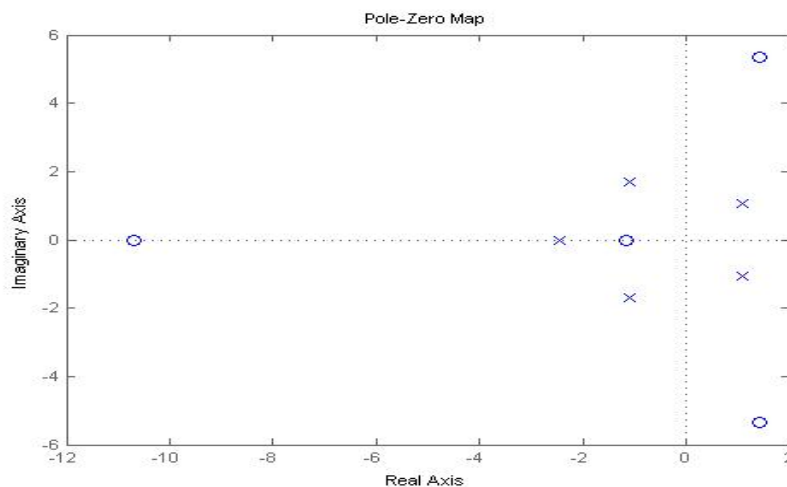
```

```

-----
18 s^5 + 45 s^4 + 32 s^3 + 7 s^2 + 8 s + 418

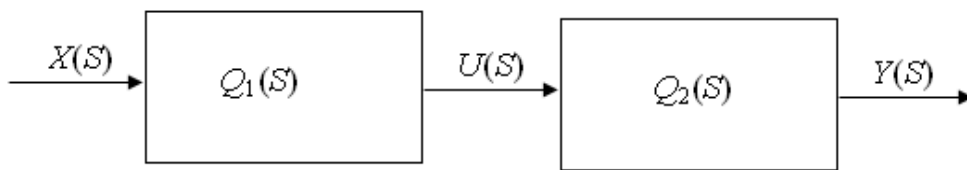
```

```
>> pzmap(q)
```



Малюнок. . Нулі та полюси передавальної функції

14. Структурну схему системи керування показано на рис.



Малюнок. Структурна схема системи

Необхідно отримати передатну функцію системи

$$Q(S) = \frac{Y(S)}{X(S)},$$

Якщо передавальні функції ланок мають вигляд:

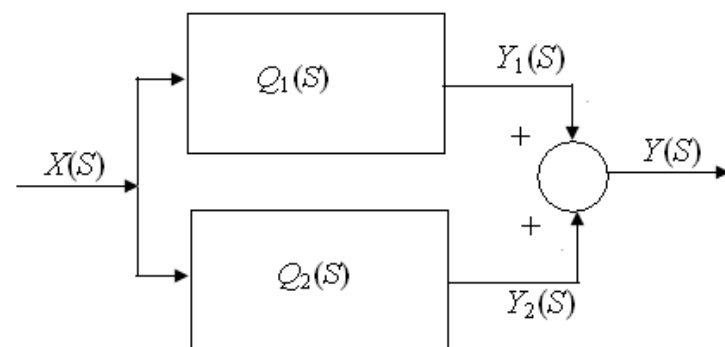
$$Q_1(S) = \frac{678s^2 + 16s + 3}{428s}, \quad Q_2(s) = \frac{0.7}{234s + 5},$$

Рішення:

```
>> n1=[678 16 3];
>> m1=[428 0];
>> q1=tf(n1,m1);
>> n2=[0,7];
>> m2=[234 5];
>> q2=tf(n2,m2);
>> Q=series(q1,q2)
Transfer function:
4746 s^2 + 112 s + 21
-----
100152 s^2 + 2140 s
```

Функція parallel ()

15. Структурну схему системи керування наведено на рис.



Мал. Структурна схема системи, що складається з паралельних ланок

Необхідно отримати передатну функцію системи, якщо передатні функції ланок мають вигляд:

$$Q_1(S) = \frac{678s^2 + 16s + 3}{428s}, \quad Q_2(s) = \frac{0.7}{234s + 5},$$

Рішення

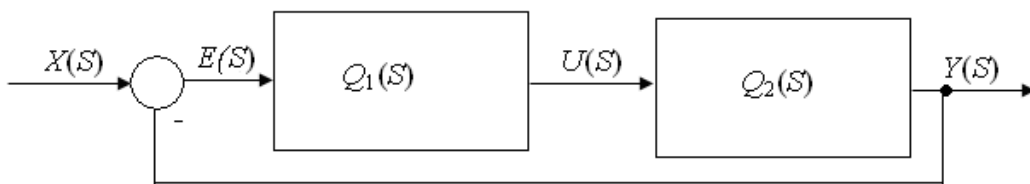
```

>> n1=[678 16 3];
>> m1=[428 0];
>> q1=tf(n1,m1);
>> n2=[0,7];
>> m2=[234 5];
>> q2=tf(n2,m2);
>> Q=parallel(q1,q2)
Transfer function:
158652 s^3 + 7134 s^2 + 3778 s + 15
-----
100152 s^2 + 2140 s
>>

```

Функція feedback()

16. Структурну схему системи керування наведено на рис.



Мал. Структурна схема системи керування.

Передатні функції ланок мають вигляд:

$$Q_1(s) = \frac{678s^2 + 16s + 3}{428s}, \quad Q_2(s) = \frac{0.7}{234s + 5},$$

Необхідно отримати передатну функцію замкнутої системи керування:

$$Q(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}.$$

Передатна функція $Q(s)$ визначається за виразом

$$Q(s) = \frac{Q_1(s) \cdot Q_2(s)}{1 + Q_1(s) \cdot Q_2(s)}.$$

Рішення:

```

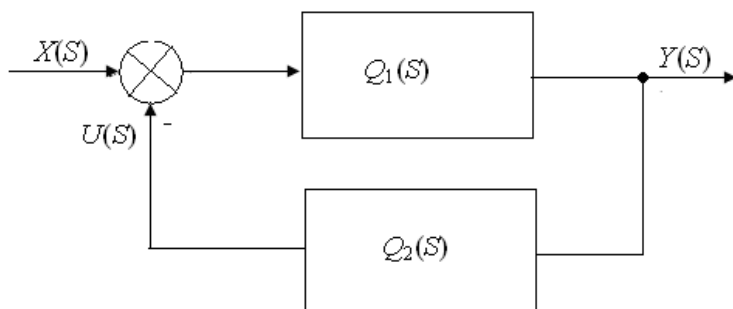
>> n1=[678 16 3];
>> m1=[428 0];
>> q1=tf(n1,m1);
>> n2=[0,7];
>> m2=[234 5];
>> q2=tf(n2,m2);
>> Q=series(q1,q2)
Transfer function:
4746 s^2 + 112 s + 21
-----
100152 s^2 + 2140 s
>> feedback(Q, [1])
Transfer function:
4746 s^2 + 112 s + 21

```

```
-----
104898 s^2 + 2252 s + 21
>>
```

17. Структурну схему системи керування наведено на рис.. Необхідно отримати передатну функцію замкнутої системи

$$Q(S) = \frac{Y(S)}{X(S)}$$



Мал. Структурна схема системи з гнучким негативним зворотним зв'язком
Передавальні функції ланок мають вигляд:

$$Q_1(S) = \frac{678s^2 + 16s + 3}{428s}, \quad Q_2(s) = \frac{0.7}{234s + 5},$$

Рішення:

```
>> n1=[678 16 3];
>> m1=[428 0];
>> n2=[0,7];
>> m2=[234 5];
>> q1=tf(n1,m1);
>> q2=tf(n2,m2);
>> feedback(q1,q2,-1)
Transfer function:
158652 s^3 + 7134 s^2 + 782 s + 15
-----
104898 s^2 + 2252 s + 21
>>
```

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Додавання комплексних чисел

Алгебра векторів та матриць. Створення векторів та матриць

Приклад 1

```
>> [8,5,7,25,-2]

ans =

     8     5     7    25    -2

>>
>> v=[7 12+6i 6-7i 15]
```

```
v = 7.0000 12.0000 + 6.0000i 6.0000 - 7.0000i 15.0000
```

Приклад 2

```
>> M = [6 7 13; 5 -5 19; 6 -21 59]
```

Після натиснення <Enter> на екрані з'явиться наступна матриця:

M =

```
6 7 13
5 -5 19
6 -21 59
```

```
>> M = [9-6i,12+i,1;4,5,2;i,8,-i]
```

А тепер матриця буде виглядати так:

M =

```
9.0000 - 6.0000i 12.0000 + 1.0000i 1.0000
4.0000 5.0000 2.0000
0 + 1.0000i 8.0000 0 - 1.0000i
```

```
>>
```

Приклад 3

```
>> V = [1:7]
```

```
V = 1 2 3 4 5 6 7
```

```
>> M = [1:3;2:4;7:9]
```

M =

```
1 2 3
2 3 4
7 8 9
```

Тут рішення отримано випадку постійного кроку, рівного 1.

При постійному кроці, відмінному від одиниці, процедури утворення вектора та матриці та відгуки мають вигляд:

```
>> V = [1:0.4:4]
```

V =

```
1.0000 1.4000 1.8000 2.2000 2.6000 3.0000 3.4000 3.8000
```

```
>> M = [1:0.2:1.8;2:0.4:3.6;1:5]
```

M =

```
1.0000 1.2000 1.4000 1.6000 1.8000
2.0000 2.4000 2.8000 3.2000 3.6000
1.0000 2.0000 3.0000 4.0000 5.0000
```

Виклик на екран та заміна елементів матриці

приклад 4

```
>> v = [9 12 6 7 -2];
```

v(4)

ans =

```
7
```

```
>> M = [4,8,19; 1 4 3; -7,9, 2];
```

```
>> M(1,2)
```

ans =

```
8
```

Приклад 5

Нехай вектор та матриця – ті ж, що й у попередньому прикладі. Замінімо третій елемент вектора (зі значенням 3) на 7, а елемент матриці, що знаходиться у другому рядку та третьому стовпці (зі значенням 3), – на 12.

Рішення:>> v(4)=8

```
v =
    9    12     6     8    -2
>>
```

```
>> M(2,2)=12
```

```
M =
    1     2     3
    2    12     4
    7     8     9
>>
```

Приклад 6

Нехай матриця має вигляд

```
>> M=[1 4 3;2 9 14;5 2 -9]
```

```
M =
    1     4     3
    2     9    14
    5     2    -9
>>
```

Необхідно видалити другий рядок та третій стовпець.

Рішення матиме вигляд:

```
>> M(3,:)
ans =
    5     2    -9
>> M(:,2)
ans =
    4
    9
    2
>>
```

Приклад 7

Нехай є три наступні вектори:

```
>> V1=[ 5 8 2]
```

```
V1 =
    5     8     2
>> V2=[ 3 -2 1]
```

```
V2 =
    3    -2     1
>> V3=[5 8 10]
```

```
V3 =
    5     8    10
>>
```

```
>> M=[V1;V2;V3]
```

```
M =
    5     8     2
    7     4     3
    5     8    10
>>
```

Виконаємо тепер операцію конкатенації. Зробимо з отриманої матриці матрицю розміром 6х6.

Для цього утворюємо три нові матриці M+3, M-5 b M*2

Процедури мають вигляд:

```
>> Z=[M, M+3; M-5, M*2]
```

```
Z =
```

```

5  8  2  8  11  5
7  4  3  10  7  6
5  8  10  8  11  13
0  3  -3  10  16  4
2  -1  -2  14  8  6
0  3  5  10  16  20

```

```
>>
```

Математичні операції з векторами та матрицями

Визначник матриці

Приклад 8

```
>> M=[4 5 8;-1 3 6;10 2 3];
```

```
>> det(M)
```

```
ans =
```

```
47
```

```
>> M=[1+3i, 6, -2.5;i,-9,5;8,5,0];
```

```
>> det(M)
```

```
ans =
```

```
35.0000 -87.5000i
```

```
>>
```

Транспортування матриці

Приклад 9

Нехай вихідна матриця має вигляд

```
>> M=[7 5 6; 4 5 3 ;10 -7 6];
```

```
>> Z=M'
```

```
Z =
```

```
7  4  10
```

```
5  5  -7
```

```
6  3  6
```

```
>>
```

Слід матриці

Приклад 10

Нехай матриця має вигляд

```
>> M=[9 18 13;3 2 6; 7 -1 6]
```

```
M =
```

```
9  18  13
```

```
3  2  6
```

```
7  -1  6
```

```
>>
```

Її діагональними елементами є 9,2,6, які сума дорівнює 17.

```
>> Z=trace(M)
```

```
Z =
```

```
17
```

```
>>
```

Зворотня матриця

```
>> M=[5 4 6;9 1 7;10 2 6];
```

```
>> Z=inv(M)
```

```
Z =
```

```
-0.1111 -0.1667  0.3056
```

```
0.2222 -0.4167  0.2639
```

```
0.1111  0.4167 -0.4306
```

```
>>
```

Поодинокі матриці

Приклад 12

```
>>> M=eye(4)
```

```
M =
```

```
1  0  0  0
0  1  0  0
0  0  1  0
0  0  0  1
```

```
>>>
```

```
>>> M=eye(2,4)
```

```
M =
```

```
1  0  0  0
0  1  0  0
```

```
>>> M=[1 21 4 3;5,2,-7,9;2,10,3,0;1,9,3,4];
```

```
>>> M=eye(size(M))
```

```
M =
```

```
1  0  0  0
0  1  0  0
0  0  1  0
0  0  0  1
```

Утворення матриці з одиничними елементами

Приклад 14

```
>>> M=zeros(3)
```

```
M =
```

```
0  0  0
0  0  0
0  0  0
```

```
>>> M=zeros(3,4)
```

```
M =
```

```
0  0  0  0
0  0  0  0
0  0  0  0
```

```
>>> M=[1,2,3;2,3,4;3,4,5];
```

```
>>> M=zeros(size(M))
```

```
M =
```

```
0  0  0
0  0  0
0  0  0
```

Вектор рівномірних точок

Приклад 15

```
>>> R=linspace(1,5)
```

```
R =
```

```
1.0000  1.0404  1.0808  1.1212  4.9596  5.0000
```

```
>>>
```

```
>>> R=linspace(1,10,5)
```

```
R = 1.0000  3.2500  5.5000  7.7500 10.0000
```

Перестановка елементів матриці

Приклад 16

```
>>> M=[1,2,3,4;4,3,2,1];
```

```
>>> Z=flipr(M)
```

```

Z =
    4    3    2    1
    1    2    3    4
>> W=flipud(M)
W =
    4    3    2    1
    1    2    3    4
>>

```

Приклад 17

```

>> V=[3,8,5];
>> P=perms(V)
P =

```

```

    5    8    3
    5    3    8
    8    5    3
    8    3    5
    3    8    5
    3    5    8
>>

```

Створення матриць із заданою діагоналлю

Приклад 18

```

>> V=[4,5,8];
>> M=diag(V,0)
M =

```

```

    4    0    0
    0    5    0
    0    0    8
>>

```

```

>> Z=diag(V,-2)
Z =

```

```

    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0
    4    0    0    0    0
    0    5    0    0    0
    0    0    8    0    0
>>

```

```

>> V=diag(M,0)
V =

```

```

    4
    5
    8
>> M=[1,2,-3,5;-2,6,4,7;1,0,4,-2];
>> V=diag(M,1)
V =

```

```

    2
    4
   -2
>>

```

```

>> V=diag(M)
V =

```

```

    1
    6

```

4

>>

Створення масивів із випадковими елементами

Приклад 19

>> Z=rand(3)

Z =

```
0.8147 0.9134 0.2785
0.9058 0.6324 0.5469
0.1270 0.0975 0.9575
```

>>

>> M=[6 4 8; 10 3 6; 7 2 3];

>> Z=rand(size(M))

Z =

```
0.9649 0.9572 0.1419
0.1576 0.4854 0.4218
0.9706 0.8003 0.9157
```

>>

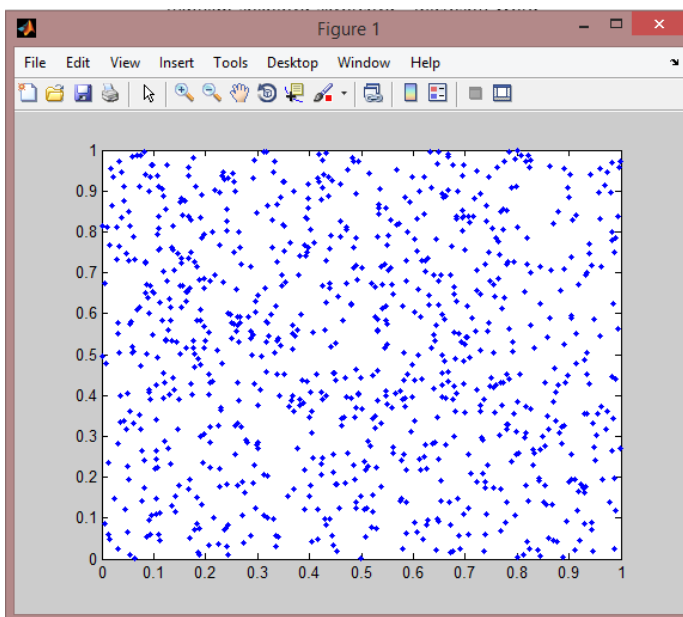
Покажемо графік, утворений випадковими числами. Для цього сформуємо координати точок на площині у вигляді матриці випадкових чисел з великим числом рядків та одним стовпцем по осях x та y.

Програма матиме такий вигляд:

>> X=rand(900, 1);

>> Y=rand(900, 1);

>> plot(X, Y, '.')



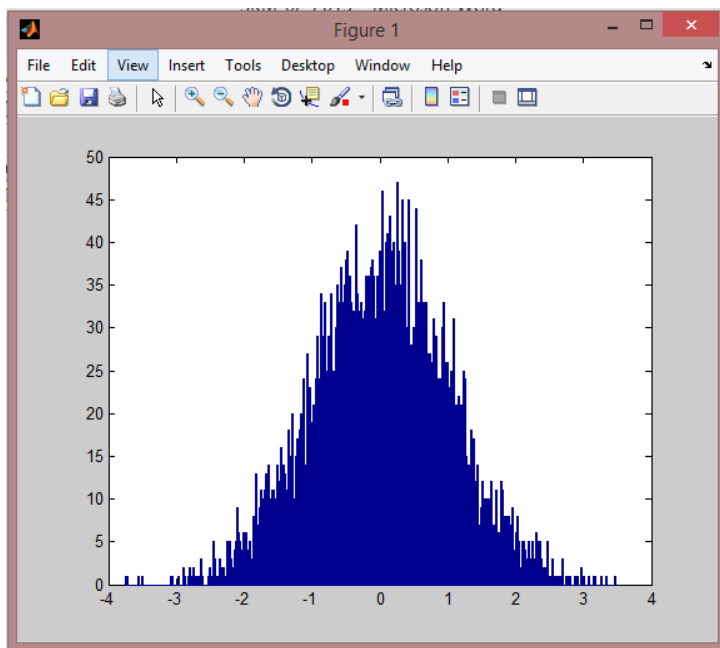
Приклад 21

Побудувати гістограму випадкових чисел за $n = 5000$ і $m = 400$

У цьому випадку програма матиме вигляд:

>> Y=randn(5000, 1);

>> hist(Y, 400)



Поворот матриці

Приклад 22

```
>> M=[2,4,5; 7,8,4; 4,6,2];
```

```
>> Z=rot90(M,2)
```

```
Z =
```

```
2    6    4
```

```
4    8    7
```

```
5    4    2
```

```
>>
```

Виділення трикутних частин матриці

Приклад 23

```
>>M=[6 7 8 ; 9 10 4; 3 1 8]
```

```
M =
```

```
6    7    8
```

```
9   10    4
```

```
3     1    8
```

```
>>
```

```
>>Z=tril(M)
```

```
Z =
```

```
6     0     0
```

```
9   10     0
```

```
3     1     8
```

```
>>Z=tril(M,1)
```

```
Z =
```

```
6     7     0
```

```
9   10     4
```

```
3     1     8
```

Обчислення математичного квадрата

Приклад 24

```
>> M=magic(7)
```

```
M =
```

```
30 39 48 1 10 19 28
38 47 7 9 18 27 29
46 6 8 17 26 35 37
5 14 16 25 34 36 45
13 15 24 33 42 44 4
21 23 32 41 43 3 12
22 31 40 49 2 11 20
```

```
>>
```

Математичні операції над векторами та матрицями

Приклад 25

```
>> M=[3 5 7; 9 10 1; 4 6 2];
```

```
>> N=[3 4 2; 5 7 8 ;2 3 5];
```

```
>> M.*N
```

```
ans =
```

```
9 20 14
45 70 8
8 18 10
```

```
>>
```

```
ans =
```

```
82 107 40
121 151 75
74 92 38
```

Приклад 26

```
>> V1=[4,6,2,7];
```

```
>> V2=[-5,4,2,14];
```

```
>> V1+V2
```

```
ans =
```

```
-1 10 4 21
```

```
>>
```

```
>> V1-V2
```

```
ans =
```

```
9 2 0 -7
```

```
>>
```

```
>> V1.*V2
```

```
ans =
```

```
-20 24 4 98
```

```
>> V1.^2
```

```
ans = 1 4 16 49
```

```
>> V1/V2
```

```
ans =
```

```
0.4398
```

```
>> V1\V2
```

```
ans =
```

```
0 0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0
```

```
-0.7143 0.5714 0.2857 2.0000
```

```
>> V1./V2
```

```
ans =
    -0.8000    1.5000    1.0000    0.5000
>> V1.\V2
ans =
    -1.2500    0.6667    1.0000    2.0000
```

Приклади утворення функцій від вектора та матриць

Приклад 27

```
>> N=[4,5,2,3,9];
>> Z=log(N)
Z =
    1.3863    1.6094    0.6931    1.0986    2.1972
>> Z=exp(N)
Z =
    1.0e+003 *
    0.0546    0.1484    0.0074    0.0201    8.1031
>> Z=sin(N)
Z =
   -0.7568   -0.9589    0.9093    0.1411    0.4121
>>
```

Приклад 28

```
>> K=[4,-9,2,1,1,4];
>> Z=log(K)
Z =
    1.3863         2.1972 + 3.1416i    0.6931     0     0    1.3863
>>
>> Z=exp(-K)
Z =
    1.0e+003 *
    0.0000    8.1031    0.0001    0.0004    0.0004    0.0000
>>
>> Z=exp(K)+2*K+K.^2
Z =
    78.5982    63.0001    15.3891    5.7183    5.7183    78.5982
>>
```

ЛІТЕРАТУРА

1. Ладанюк А.П. Теорія автоматичного керування: курс лекцій (частина перша) Київ: НУХТ, 2004. 124 с.
2. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування: Підручник. Київ: Либідь, 2007. 544 с.
3. Євстіфєєв В. О. Теорія автоматичного керування. Частина перша. Безперервні лінійні та нелінійні системи. Навчальний посібник. Кременчук: ПП Щербатих О.В. 2006.
4. Александров Є.Є., Козлов Е.П., Кузнєцов Б.І. Автоматичне керування рухомими об'єктами і технологічними процесами. Том. І. Теорія автоматичного керування. Харків: НТУ "ХПІ", 2002. 490 с.
5. Александров Є.Є., Голуб О.П., Костенко Ю.Т., Кузнєцов Б.І., Соляник В.П. Теорія автоматичного управління. В 3-х томах. Харків, НТУ "ХПІ", 2018. 460 с.

Інформаційні ресурси

1. http://lib.knu.edu.ua/?page_id=6
2. <http://surl.li/juthg>