УДК 514.742:531.1

О.А. ГУЛІВЕЦЬ,[·] канд. техн. наук, доц., С.Ю. ОЛІЙНИК, асист.
Криворізький національний університет

ВЕКТОРНИЙ МЕТОД ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ВЕКТОРНИХ ФУНКЦІЙ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

Мета. Метою даної роботи є розробка векторного методу диференціювання векторних функцій скалярного аргумента.

Методи. На основі аналізу годографів векторних функцій і представлення приросту вектора функції, який одночасно змінюється за напрямом та величиною, як суми приросту внаслідок зміни напряму вектора та приросту внаслідок зміни його модуля одержані математичні залежності для векторного диференціювання векторних функцій скалярного аргумента.

Наукова новизна. Розроблено векторний метод диференціювання векторних функцій скалярного аргумента, вектор яких одночасно змінюється за напрямом і модулем та установлена залежність абсолютної похідної векторної функції скалярного аргумента, яка характеризує певне механічне явище, що відбувається в певній системі відліку, яка здійснює рух відносно інших систем відліку, одна з яких приймається за нерухому, від кутових швидкостей обертання рухомих систем відліку.

Практична значимість. Використання розробленого векторного методу диференціювання векторних функцій скалярного аргумента в навчальному процесі дозволяє більш переконливо та з меншими затратами часу виконувати доведення ряду теоретичних положень з дисципліни «Теоретична механіка».

Результати. На основі аналізу годографа векторної функції скалярного аргумента, вектор якої одночасно змінюється за напрямом і за модулем установлено, що вектор приросту цієї функції при змінюванні скалярного аргумента дорівнює геометричній сумі цієї функції в наслідок зміни напряму її вектора і приросту, який є наслідком зміни модуля цієї функції. Виходячи з цього в роботі установлено, що вектор похідної функції скалярного аргумента складається з двох складових: вектора похідної, яка характеризує швидкість змінювання напряму вектора функції і вектора похідної, яка характеризує змінювання модуля вектора.

В роботі також розглянуто випадок диференціювання векторним методом функції скалярного аргумента, яка характеризує механічне явище, що відбувається в деякій системі відліку, яка здійснює рух відносно інших систем відліку, одна з яких прийнята за нерухому.

Установлено, що абсолютна похідна векторної функції скалярного аргумента в цьому випадку залежить від кутових швидкостей обертання рухомих систем відліку, та установлена залежність, яка характеризує цей зв’язок.

Ключові слова: вектор, функція, скаляр, аргумент, годограф, диференціювання, похідна.

doi: 10.31721/2306-5451-2018-1-47-143-149

Проблема та її зв’язок з науковими та практичними завданнями. Теоретична механіка, як наука про механічний рух та взаємодію матеріальних тіл, відіграє дуже важливу роль при формуванні у студентів вміння мислити механічними категоріями і є базою для вивчення ряду інженерних дисциплін.

При вивченні дисципліни «Теоретична механіка» проводиться доведення певних теоретичних положень, при виконанні яких проводяться ряд математичних операцій над векторними та скалярними величинами.

В сучасних умовах роботи вищої школи, коли стрімко зменшується кількість часу на аудиторне навчання, при вивченні теоретичної механіки постає необхідність застосовувати такі методи проведення математичних операцій над векторними величинами, які б переконливо з малими затратами часу дозволяли виконувати доведення тих чи інших теоретичних положень з даної дисципліни.

Отже, розробка нових методів проведення певних математичних операцій над векторними величинами, які б відповідали цим вимогам є актуальним для вищої школи.

Аналіз досліджень та публікацій. При дослідженнях ряду фізичних явищ над векторними величинами, що їх описують, проводять математичні операції: знаходження суми, векторного і скалярного добутку, добуток векторної величини на скалярну, диференціювання та інтегрування, які достатньо повно і на високому рівні розглянуті в ряді літературних джерел з вищої математики [1…4] та теоретичної механіки [5…14].

Як відомо [5] є два методи проведення математичних операцій над векторними величинами: векторний та координатний. При векторному методі оперують безпосередньо з векторами, не зв’язуючи їх з певними системами координат. При координатному методі операції проводяться над скалярними величинами, які аналітично визначають вектор в деякій системі координат.

У розглянутих літературних джерелах з вищої математики [1…4] при диференціюванні векторних функцій скалярного аргументу застосовано лише координатні методи (при диференціюванні векторні функції розкладають вздовж осей певної системи координат).

В джерелах з теоретичної механіки [5…13] при диференціюванні векторних функцій скалярного аргументу в основному також застосований координатний метод.

В роботі [6] формулу Ейлера для визначення швидкості точки тіла при обертальному русі як векторного добутку кутової швидкості тіла на радіус-вектор точки одержано векторним методом. Однак при виведенні формули Бура, яка виражає зв'язок між відносною і абсолютною похідними від радіуса-вектора точки, використано координатний метод.

В роботі [14] приведено розроблений векторний метод диференціювання векторних функцій скалярного аргументу та його застосування для доведення теорем кінематики матеріальної точки та твердого тіла, який ґрунтується на представленні її вектора у вигляді добутку одиничного вектора на модуль цього вектора. Застосування цього методу при доведенні теорем кінематики точки та твердого тіла дозволяє скоротити час на їх доведення, але є недостатньо наочним.

Постановка задачі. На основі аналізу властивостей векторних функцій скалярного аргументу і геометричної інтерпретації їх годографів розробити векторний метод їх диференціювання, який повинен бути наочно переконливим для застосування в навчальному процесі.

Викладення матеріалу та результати. В теоретичній механіці – науці про механічний рух та взаємодію матеріальних об'єктів – широко застосовуються методи векторного числення, які мають велику перевагу перед координатним методом внаслідок компактності і фізичної наочності векторних формул.

В ряді досліджень використовують змінні векторні величини, які є функціями скалярних величин – векторними функціями скалярного аргумента.

При дослідженнях механічного руху точки та твердого тіла векторними функціями скалярного аргумента (часу) є радіуси-вектори точок $\overline{r} = \overline{r}(t)$, їх швидкості $\overline{\upsilon} = \overline{\upsilon}(t)$ та прискорення $\overline{a} = \overline{a}(t)$.

При кінематичних дослідженнях над векторними функціями скалярного аргумента проводяться математичні операції: знаходження їх суми, векторного та скалярного їх добутку, добутку векторних функцій на скалярну функцію або сталу скалярну величину, диференціювання та інтегрування.

Математичні операції над векторними функціями скалярного аргумента: знаходження їх суми, векторного та скалярного добутку, добутку векторних функцій на скалярну функцію виконуються так само як і над будь-якими векторними величинами.

Диференціювання векторних функцій скалярного аргумента, добутку векторних функцій на скалярну, скалярного або векторного добутків векторних функцій виконується за правилами, які аналогічні відомим правилам диференціювання скалярних функцій.

Так як при дослідженнях кінематики та динаміки механічних явищ виникає необхідність диференціювати певні векторні функції скалярного аргумента (часу, дуги та ін.), які можуть бути різними за фізичним змістом, то спочатку введемо поняття похідної довільної векторної функції скалярного аргумента не надаючи їй конкретного фізичного змісту.

Нехай деяке механічне явище характеризується в певній системі відліку деякою безперервною векторною функцією $\overline{a}(u)$ скалярного аргумента u.

Розглянемо три частинні випадки змінювання векторної функції при змінюванні аргумента:

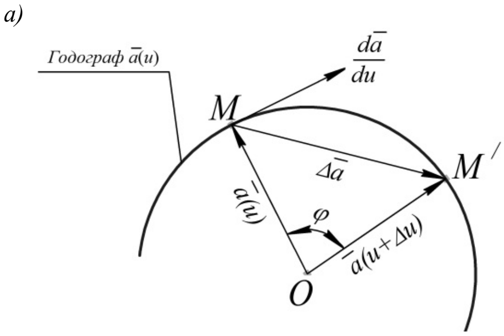
1) функція змінюється лише за напрямом (рис. 1*а*);

2) функція змінюється лише за модулем (величиною) (рис. 1*б*);

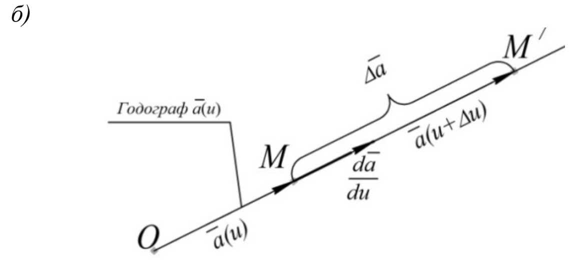
3) функція змінюється одночасно за напрямом та модулем (рис. 1*в*).

Лінія, яку окреслює при безперервному змінюванні скалярного аргумента u кінець вектора $\overline{a}(u)$, початок якого знаходиться в деякій фіксованій точці простору, називається годографом векторної функції $\overline{a}(u)$. Як видно з рис. 1, при змінюванні векторної функції лише за напрямом годографом $\overline{a}(u)$ буде дуга кола радіуса a. Якщо ж векторна функція буде змінюватись лише за модулем, то годографом вектора $\overline{a}(u)$ буде пряма лінія, яка бере початок у фіксованій точці. При одночасному змінюванні векторної функції за напрямом та модулем годографом вектора $\overline{a}(u)$ буде крива або пряма лінія, що не проходить через фіксовану точку простору.

а)



б)



в)

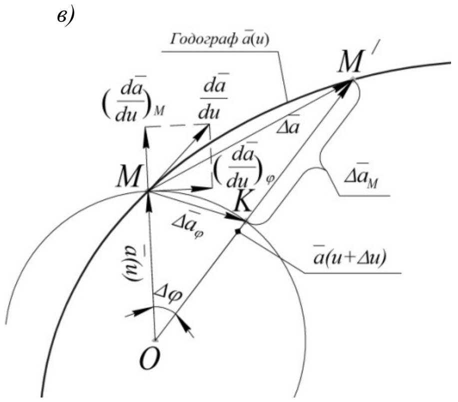


Рис. 1. До визначення похідної векторної функції: *а* – функція змінюється лише за напрямом; *б* – функція змінюється лише за модулем; *в* – функція змінюється одночасно за модулем та напрямом

Нехай в усіх трьох випадках деякому значенню аргумента u відповідає точка M годографа функції $\overline{a}(u)$, положення якої відносно фіксованої точки простору О буде визначати радіус-вектор $\overline{a}(u)$, а після приросту аргумента на величину Δu значення функції буде $\overline{a}(u+\Delta u)$, якому відповідає точка $M^{/}$, положення якої визначається радіусом-вектором $\overline{a}(u+\Delta u)$.

Тоді приріст векторної функції $\overline{a}(u)$, що відповідає приросту скалярного аргумента Δu визначиться різницею

$$\Delta\overline{a} = \overline{a}(u+\Delta u) - \overline{a}(u).$$

Як відомо з вищої математики, похідною першого порядку векторної функції $\overline{a}(u)$ називається змінний вектор, який визначається рівністю

$$\frac{d\overline{a}(u)}{du} = \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta\overline{a}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\overline{a}(u+\Delta u)-\overline{a}(u)}{\Delta u}, \tag{1}$$

якщо границя в правій частині цієї рівності існує.

Розглянемо визначення похідної векторної функції, яка змінюється при зміні скалярного аргумента лише за напрямом (див. рис. 1*а*).

У цьому випадку вектор приросту функції $\Delta\overline{a}(u)$, який спрямований по січній $MM^{/}$, при $\Delta u \to 0$, гранично буде спрямований по дотичній до годографа векторної функції $\overline{a}(u)$ в точці M.

Отже вектор похідної $\frac{d\overline{a}}{du}$, що визначається згідно з рівнянням (1), характеризує швидкість змінювання вектора $\overline{a}(u)$ при змінюванні аргумента u і буде спрямованим по дотичній до годографа функції в бік зростання аргумента. А так як модуль $|\overline{a}(u)| = const$, то вектор $\frac{d\overline{a}}{du}$ буде перпендикулярним векторові $\overline{a}(u)$.

Модуль векторної функції скалярного аргумента у випадку, що розглядається є сталою величиною $|\overline{a}(u)| = a$, тому трикутник $MOM^{/}$ (див. рис. 1*а*) є рівнобедреним, в якому кут $\Delta\varphi$ характеризує поворот вектора $\overline{a}(u)$, що відповідає зміні аргумента Δu. З трикутника $MOM^{/}$ модуль приросту векторної функції визначається з рівняння

$$|\Delta\overline{a}| = MM^{/} = 2a\sin\frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Тоді модуль похідної векторної функції $\overline{a}(u)$ визначається згідно з рівнянням

$$\left|\frac{d\overline{a}(u)}{du}\right| = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{|\overline{a}|}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{2a \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta u}. \qquad (2)$$

Помножимо чисельник і знаменник правої частини рівняння (2) на $\frac{\Delta\varphi}{2}$ і одержимо

$$\left|\frac{d\overline{a}(u)}{du}\right| = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{2a \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \cdot \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta u \cdot \frac{\Delta\varphi}{2}} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{a\Delta\varphi \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta u \cdot \frac{\Delta\varphi}{2}}.$$

Прийнявши до уваги, що при $\Delta u \to 0$ кут $\Delta\varphi \to 0$, а $\lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} = 1$, одержимо

$$\left|\frac{d\overline{a}(u)}{du}\right| = a \cdot \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta u} = a \cdot \omega, \qquad (3)$$

де ω – модуль вектора кутової швидкості повертання вектора $\overline{a}(u)$ навколо осі, що проходить через фіксовану точку *O* простору внаслідок зміни величини аргумента *u*.

Вектор кутової швидкості $\overline{\omega}$ спрямований вздовж осі, яка проходить через фіксовану точку *O* простору, перпендикулярний площині, в якій відбувається зміна напряму вектора $\overline{a}(u)$, і спрямований в той бік, звідки, якщо дивитись назустріч цьому векторові, будемо спостерігати повертання вектора $\overline{a}(u)$ внаслідок змінювання аргумента *u* проти руху годинникової стрілки. Отже, кут між вектором $\overline{\omega}$ та вектором $\overline{a}(u)$ дорівнює 90°. Тоді права частина рівняння (3) є модулем векторного добутку

$$\left|\overline{\omega} \times \overline{a}(u)\right| = \omega \cdot a \cdot \sin 90^\circ = \omega \cdot a.$$

Звідси висновок: вектор похідної векторної функції $\overline{a}(u)$, яка змінюється лише за напрямом, по скалярному аргументу визначається рівністю

$$\frac{d\overline{a}(u)}{du} = \overline{\omega} \times \overline{a}(u). \qquad (4)$$

Отже, похідна векторної функції скалярного аргумента, яка змінюється за напрямом і є сталою за модулем, по скалярному аргументу є вектор, який дорівнює векторному добутку вектора кутової швидкості повертання вектора функції $\overline{a}(u)$ при змінюванні скалярного аргумента *u* на векторну функцію $\overline{a}(u)$.

У випадку, коли вектор функції змінюється лише за модулем і є сталим за напрямом (див. рис. 1*б*), годографом функції $\overline{a}(u)$ є пряма лінія, що проходить через фіксовану точку *O*. Вздовж годографа функції в бік зростання аргумента буде спрямований вектор приросту функції $\Delta\overline{a}(u)$. Вектор похідної векторної функції, яка змінюється лише за модулем, визначається згідно з рівнянням (1) і є спрямованим вздовж годографа векторної функції $\overline{a}(u)$ в бік зростання аргумента.

Модуль похідної векторної функції в даному випадку дорівнює

$$\left|\frac{d\overline{a}(u)}{du}\right| = \frac{da(u)}{du}.$$

У випадку, коли векторна функція скалярного аргумента одночасно змінюється за модулем і напрямом, годографом такої функції може бути випукла або угнута відносно фіксованої точки крива лінія або пряма лінія, що не проходить через фіксовану точку простору.

Розглянемо випадок, коли годографом векторної функції є випукла крива (див. рис. 1*в*).

Нехай точка *M* годографа функції $\overline{a}(u)$ відповідає деякому значенню аргумента *u*, а точка M' годографа значенню аргумента $u+\Delta u$. Нехай при цьому приріст аргумента $\Delta u>0$. Приріст $\Delta\overline{a}$ вектора функції $\overline{a}(u)$ буде спрямований вздовж січної MM' в бік зростання аргумента.

Як видно з рис. 1*в*, приріст $\Delta\overline{a}$ може бути представлений геометричною сумою приросту векторної функції при її змінюванні лише за напрямом при сталому модулі $\Delta\overline{a}(u)_\varphi$ та приросту векторної функції при її змінюванні лише за модулем при сталому напрямі $\Delta\overline{a}(u)_M$

$$\Delta\overline{a}(u) = \Delta\overline{a}(u)_\varphi + \Delta\overline{a}(u)_M \,. \tag{5}$$

Тоді згідно з рівняннями (1) і (5) похідна векторної функції по скалярному аргументу прийме вигляд

$$\frac{d\overline{a}(u)}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\overline{a}(u)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\overline{a}(u)_\varphi}{\Delta u} + \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\overline{a}(u)_M}{\Delta u} \,.$$

Звідси наслідок

$$\frac{d\overline{a}(u)}{du} = \frac{d\overline{a}(u)_\varphi}{du} + \frac{d\overline{a}(u)_M}{du} \,. \tag{6}$$

Отже, в загальному випадку, коли вектор функції скалярного аргумента одночасно змінюється за напрямом та величиною, вектор її похідної по скалярному аргументу $\frac{d\overline{a}(u)}{du}$ є геометричною сумою вектора похідної цієї функції при її змінюванні лише за напрямом при сталому модулі $\frac{d\overline{a}(u)_\varphi}{du}$ і вектора похідної цієї функції при її змінюванні лише за модулем та сталому напрямі $\frac{d\overline{a}(u)_M}{du}$.

Вектор $\frac{d\overline{a}(u)}{du}$ характеризує швидкість змінювання за модулем та напрямом вектора функції $\overline{a}(u)$ спрямований по дотичній до годографа в бік, що відповідає зростанню аргумента.

Вектор $\frac{d\overline{a}(u)_\varphi}{du}$ характеризує швидкість змінювання напряму вектора векторної функції $\overline{a}(u)$ при незмінному модулі і спрямований по дотичній до годографа функції, що змінюється лише за напрямом, в бік, що відповідає зростанню аргумента.

Вектор $\frac{d\overline{a}(u)_M}{du}$ характеризує швидкість змінювання модуля вектора векторної функції $\overline{a}(u)$ при сталому напрямі і спрямований вздовж вектора векторної функції в напрямі його зростання.

Підставивши значення похідної векторної функції по скалярному аргументу при змінюванні її вектора лише за напрямом при незмінному модулі (4) в рівняння (6) одержимо

$$\frac{d\overline{a}(u)}{du} = \overline{\omega} \times \overline{a}(u) + \frac{d\overline{a}(u)_M}{du} \,. \tag{7}$$

Розглянемо більш складний випадок диференціювання векторних функцій скалярного аргумента.

Нехай в деякій точці простору відбувається механічне явище, яке характеризується деякою векторною функцією $\overline{a}(u)$ і яке фіксується в двох системах відліку: в рухомій системі, де це явище відбувається безпосередньо, яку будемо називати відносною і в системі, яку приймаємо за нерухому і відносно якої здійснює рух рухома.

Швидкість змінювання векторної функції $\overline{a}(u)$ відносно рухомої системи відліку будемо називати відносною похідною і позначати $\left(\frac{d\overline{a}(u)}{du}\right)_r$, а відносно нерухомої системи відліку будемо називати абсолютною похідною векторної функції по скалярному аргументу і позначати $\left(\frac{d\overline{a}(u)}{du}\right)_a$. Установимо залежність між абсолютною та відносною похідними векторної функції скалярного аргумента.

Швидкість змінювання векторної функції відносно рухомої системи відліку не залежить від руху цієї системи відліку відносно нерухомої. Отже відносна похідна векторної функції по скалярному аргументу згідно з рівнянням (7) буде мати вигляд

$$\left(\frac{d\overline{a}(u)}{du}\right)_r = \overline{\omega} \times \overline{a}(u) + \frac{d\overline{a}(u)_M}{du}, \tag{8}$$

де $\overline{\omega}_r$ – вектор кутової швидкості повертання вектора функції $\overline{a}(u)$ у відносній (рухомій) системі відліку.

Розглянемо тепер абсолютну похідну векторної функції $\overline{a}(u)$. Враховуючи, що на величину модуля векторної функції $\overline{a}(u)$ зміна положення рухомої системи відліку відносно нерухомої не впливає, а на величину змінювання напряму даної векторної функції додатково вплине лише кутова швидкість обертання тіла відліку рухомої системи і враховуючи (8) запишемо похідну векторної функції $\overline{a}(u)$ відносно нерухомої системи відліку

$$\left(\frac{d\overline{a}(u)}{du}\right)_a = \overline{\omega}_r \times \overline{a}(u) + \frac{d\overline{a}(u)_M}{du} + \overline{\omega}_e \times \overline{a}(u), \tag{9}$$

де $\overline{\omega}_e$ – вектор кутової швидкості обертання тіла відліку рухомої системи відносно миттєвої осі, що проходить через початок відліку рухомої системи.

Тоді рівняння (9), яке виражає абсолютну похідну векторної функції по скалярному аргументу, враховуючи рівняння (8), прийме вигляд

$$\left(\frac{d\overline{a}(u)}{du}\right)_a = \left(\frac{d\overline{a}(u)}{du}\right)_r + \overline{\omega}_e \times \overline{a}(u). \tag{10}$$

Таким чином, векторним методом одержана формула Бура, з якої випливає, що абсолютна похідна векторної функції скалярного аргумента дорівнює векторній сумі відносної похідної цієї функції та векторного добутку кутової швидкості обертання рухомої системи відліку (тіла відліку) на вектор, який диференціюють.

Якщо фізичне явище, яке характеризується деякою векторною функцією $\overline{a}(u)$ і яке фіксується крім нерухомої в декількох рухомих системах відліку, які матимуть свої тіла відліку, кожне з яких буде мати свій вектор кутової швидкості обертання відносно своєї миттєвої осі $\overline{\omega}_{ei}$, то абсолютна похідна векторної функції $\overline{a}(u)$ прийме вигляд

$$\left(\frac{d\overline{a}(u)}{du}\right)_a = \left(\frac{d\overline{a}(u)}{du}\right)_r + \sum_{i=1}^{n} \overline{\omega}_{ei} \times \overline{a}(u). \tag{11}$$

Висновки та напрямок подальших досліджень. На основі аналізу властивостей векторних функцій скалярного аргумента їх годографів і математичних операцій над векторними функціями розроблено векторний метод їх диференціювання (7, 11), який має ряд переваг в порівнянні з координатним.

Розроблений метод є наочно переконливим і доцільним для використання в навчальному процесі при вивченні дисципліни «Теоретична механіка».

Список літератури

1. **Мельникова Н.В., Мельников Ю.Б., Мельникова Ю.Ю.** Основы векторного анализа. Интегралы в теории поля. ГОУ ВПО «УГТУ - УПИ», 2006.

2. **Гриньов Б.В.** Векторна алгебра: підруч. для техн. ВНЗ / **Б.В. Гриньов, І.К. Кириченко. За ред. О.М. Литвина**, - Харків: Гімназія, 2008. – 164 с.

3. Элементы векторного анализа. Электронное учебное пособие. Составители: **Галеев А.А., Червиков Б.Г.** – Казань: Казанский государственный университет, 2009.

4. **Малышев А.И., Максимова Г.М.** Основы векторного и тензорного анализа для физиков. Электронное учебно-методическое пособие. Нижнегородский университет, 2012. – 10 с.

5. Курс теоретической механики, т. 1 (кинематика, статика, динамика точки). **Кильчевский Н.А.** Изд. 2-е. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М.: 1977 г., 480 с.

6. **Павловский М.А. и др.** Теоретическая механика. Статика. Кинематика / **М.А. Павловский, Л.Ю. Акинфиева, О.Ф. Бойчук; под ред. М.А. Павловского.** – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1989. – 351 с.

7. **Никитин Н.П.** Курс теоретической механики. Учеб. для машиностроит. и приборостроит. спец. вузов 5-е изд. перераб. и доп. / **Н.Н. Никитин.** – М.: Высш. шк., 1990. – 607 с.

8. **Токар А.М.** Теоретична механіка. Кінематика. Методи і задачі. Навч. посібник / А.М. Токар. – К.: Либідь, 2001. – 416 с.

9. **Бутенин Н.В.** Курс теоретической механики. В двух томах / **Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин.** – СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 736 с.

10. **Павловский М.А.** Теоретическая механика / **М.А. Павловский.** - Киев: Техника, 2002. – 510 с.

11. **Тарг С.М.** Краткий курс теоретической механики. Учебник. 9-е изд. стер. / **С.М. Тарг**. – СПб.: Издательст-

во «Лань», 2002. – 768 с.
12. **Бондаренко А.А., Дубінін О.О., Переяславцев О.М.** Теоретична механіка: Підручник: У 2 ч. – Ч. 1: Статика. Кінематика. – К.: Знання, 2004. – 599 с. – (Вища освіта XXI століття).
13. **Дронг В.И.** Курс теоретической механики. Учебник для вузов / **В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др. Под общей ред. К.С. Колесникова.** 3-е изд. стереотип. – М.: изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 736 с.
14. **Гулівець О.А., Олійник С.Ю., Маркевич Г.А.** Векторні функції скалярного аргументу при дослідженнях кінематики точки та твердого тіла. Вісник Черкаського університету. Серія фізико-математичні науки, 2017, № 1. – С. 138-146.

Рукопис подано до редакції 19.04.2018

УДК 621.9.04:533.9: 621.791.947.55

В.П. НЕЧАЄВ, А.О. РЯЗАНЦЕВ, кандидати техн. наук, доценти, О.О. СОЛОДУН, магістрант
Криворізький національний університет

ВПЛИВ СИЛОВОГО І ТЕПЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ ЗУБА ФРЕЗИ НА СТІЙКІСТЬ ЛЕЗА ПРИ ПЛАЗМОВО-МЕХАНІЧНОМУ ФРЕЗЕРУВАННІ

Мета. Метою даної роботи є вдосконалення технології обробки деталей з важкооброблюваних матеріалів, а саме – дослідження та наукове обґрунтування параметрів процесу плазмово-механічного фрезерування поверхонь деталей з легованих сталей для підвищення продуктивності обробки, забезпечення необхідної стійкості робочої частини різального інструменту.

Методи дослідження. Результати роботи отримані шляхом теоретичних і експериментальних досліджень. Теоретичні дослідження полягають у визначенні параметрів теплового поля заготовки при плазмовому нагріванні в умовах плазмово-механічного фрезерування. Експериментальні дослідження засновані на комплексному вивченні взаємозв'язку основних показників фрезерування з факторами попереднього плазмового нагрівання припуску.

Наукова новизна. У результаті проведених досліджень були отримані дані про температурні поля в матеріалі заготовки при нагріванні плазмовою дугою, що сканує одночасно в двох напрямках щодо вектору хвилинної подачі. Виявлене падіння інтенсивності навантаження передньої поверхні ріжучого клину по всьому шляхові контакту зуба фрези із заготовкою, у порівнянні з обробкою без нагрівання. Вивчені особливості зношування ріжучого леза та умови виникнення та розвитку округлення ріжучої крайки, виведені залежності, що визначають зв'язок стійкості інструмента з режимами нагрівання й різання в конкретних умовах плазмово-механічного фрезерування.

Практичне значення. Розроблений процес плазмово-механічного фрезерування та рекомендації з вибору параметрів нагрівання й різання дозволяють в 2… 4 рази побільшати продуктивність обробки заготовок зі середньо легованих сталей і титанових сплавів при збереженні стійкості ріжучої частини інструмента.

Результати. Встановлено, що попереднє плазмове нагрівання при фрезеруванні площини забезпечує протікання специфічного термічного циклу в матеріалі припуску, у результаті чого змінюються твердість і пластичність оброблюваного матеріалу. Зміна механічних властивостей припуску приводить до зниження питомих навантажень на ріжучий клин, до зниження інтенсивності його адгезійного зношування й тендітного руйнування, до його округлення, що позитивно позначається в цілому на стійкості інструмента.

Ключові слова: плазмова дуга, фрезерування, ріжучий клин, навантаження, стійкість.

doi:

Проблема і її зв'язок з науковими і практичними завданнями. Розвиток машинобудування вимагає від вчених і інженерів пошуку нових високоефективних методів обробки металу, створення надійних технологічних процесів і найбільш ефективного застосування їх в виробничих умовах. Одним з таких процесів є плазмово-механічна обробка (ПМО). З'явившись в кінці 60-х років минулого століття, вона до цих пір є предметом вивчення, в наукових лабораторіях, розкриваються її нові можливості та перспективи. ПМО - досить складний процес, кількість керованих параметрів якого велике, що ускладнює ефективно застосовувати процес без попередніх досліджень для визначення раціональних режимів обробки .

Це особливо відноситься до плазмово-механічного фрезерування (ПМФ). Аналіз літературних джерел по проведеним лабораторним дослідженням виявив раціональні схеми процесу ПМФ, області їх застосування, що дозволило визначити коло технологічних проблем, що вирішуються при цьому процесі, рекомендувати його впровадження на конкретних операціях [1, 7, 12, 13].

Висока ефективність плазмово-механічного фрезерування робить актуальними подальші розробки, спрямовані на пошук нових способів застосування плазмової дуги для поверхневого