Σ_{2x}=0,349066; Σ_{2y}=−0,349066; Σ_4=0,038904; Σ_6=0;

μ_{x1}=3,863135; μ_{x2}=4,145272; μ_{x3}=4,145272; μ_{y1}=3,863135; μ_{y2}=4,145272; μ_{y3}=4,145272.

г - моноклинная решётка:

ω_1=2; ω_2=1+2*j*; μ_1=100; μ_2=200; *a*=0,5; *b*=0,9; $\omega_1' = 4j$; $\omega_2' = -1 + 2j$; γ=2;

Σ_{2x}=0,859123; Σ_{2y}=−0,711673; Σ_4=0,075668; Σ_6=0,059896;

μ_{x1}=5,0203; μ_{x2}=5,115478; μ_{x3}=5,230174; μ_{y1}=3,918797; μ_{y2}=3,968642; μ_{y3}=4,027861.

д - гексагональная решётка с полым цилиндром:

ω_1=2; $\omega_2=1+\sqrt{3}j$; μ_1=1; μ_2=1000; *a*=0,5; *b*=0,9; $\omega_1' = 2\sqrt{3}j$, $\omega_2' = -1 + \sqrt{3}j$; γ=2;

Σ_{2x}=0,9069; Σ_{2y}=−0,9069; Σ_4=0; Σ_6=0,09161;

μ_{x1}=6,457589; μ_{x2}=6,457589; μ_{x3}=6,708392; μ_{y1}=6,457589; μ_{y2}=6,457589; μ_{y3}=6,708392.

е - гексагональная решётка со сплошным цилиндром:

ω_1=2; $\omega_2=1+\sqrt{3}j$; μ_1=1000; μ_2=1000; *a*=0,5; *b*=0,9; $\omega_1' = 2\sqrt{3}j$, $\omega_2' = -1 + \sqrt{3}j$; γ=2;

Σ_{2x}=0,9069; Σ_{2y}=−0,9069; Σ_4=0; Σ_6=0,09161;

μ_{x1}=6,494034; μ_{x2}=6,494034; μ_{x3}=6,748278; μ_{y1}=6,494034; μ_{y2}=6,494034; μ_{y3}=6,748278.

Как видно из примеров *б*, *в* и *д*, *е*, расчеты подтверждают изотропию приведенных свойств среды для квадратной и гексагональной решеток. Подтверждается также очевидная из физических соображений слабая зависимость магнитной проницаемости от наличия полостей в цилиндрах при высокой магнитной проницаемости области F_2.

Выводы. На основе метода мультиполей классические результаты для приведенных магнитных свойств упорядоченной гетерогенной среды с цилиндрами обобщены путем рассмотрения дискретной фазы в виде полых цилиндров с произвольными радиусами и магнитными проницаемостями областей.

Расчетами подтверждена быстрая сходимость результатов при увеличении степени учета мультипольного взаимодействия. При отсутствии контакта цилиндров достаточная для практических вычислений точность во многих случаях обеспечивается учетом только дипольного, квадрупольного и, возможно, октупольного приближения.

Список литературы

1. **Rayleigh J.W.** On the Influence of Obstacles Arranged in Rectangular Order upon the Properties of a Medium. // Phil. mag., 1892, v. 5, p. 481-505.
2. **Балагуров Б.Я., В.А. Кашин** О проводимости двумерной системы с двоякопериодическим расположением круговых включений. // Журнал технической физики. – 2001. – Том 71, вып. 1. – С. 106-111.
3. **Емец Ю.П.** Эффективные параметры многокомпонентных диэлектриков с гексагональной структурой. // Журнал технической физики. – 2002. – Том 72, вып. 1. – С. 51-59.
4. **Perrins PVT., McKenzie D.R., McPhedran R.C.** Transport Properties of Regular Arrays of CylindersII Proc. R. Soc. Lond. A. – 1979. – Vol. 369. – P. 207-225.
5. **Толмачев С.Т., Юхимович Д.Л., Бондаревский С.Л**. Двоякопериодическая задача для полых круговых цилиндров. // Електротехніка і електромеханіка. – 2010. – № 2. – С. 42– 45.
6. **Толмачев С.Т., Юхимович Д.Л.** Задача приведения для регулярной системы полых круговых цилиндров с произвольной решёткой периодов. // Технічна електродинаміка. – 2011. – № 2. – С. 11– 17.
7. **Толмачев С.Т.** Специальные методы решения задач магнитостатики. – Киев: Вища школа, 1983. – 166 с.

Рукопись поступила в редакцию 21.02.13

УДК 621.318.13

С.Т. ТОЛМАЧЕВ, д-р техн. наук, проф., А.В. ИЛЬЧЕНКО, канд. техн. наук, доц., В.А. ВЛАСЕНКО, ассистент, ГВУЗ «Криворожский национальный университет»

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В МАГНИТНОПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

Для магнитопроводящих сред, расположенных в ограниченном пространстве, получена система двух интегральных уравнений относительно естественных вторичных источников поля - векторов намагниченности среды и плотности вихревых токов - при синусоидальном законе изменения первичного поля. На основе этих уравнений построены расчетные выражения, составляющие основу предложенной математической модели.

Актуальность работы. Исследование квазистационарных электромагнитных полей занимает видное место в теоретической и прикладной электротехнике [1-6]. Реализация этих задач в полевой постановке стала одним из основных направлений в области математического моделирования различных электрофизических процессов. Устойчивый и непрерывно возрастающий интерес к постановке и решению задач моделирования квазистационарных электромагнитных полей в основном обусловлен следующими причинами: быстрым увеличением вычислительных возможностей ЭВМ; широким спектром технических задач, для которых квазистационарное приближение даёт достаточно адекватное описание реальных процессов; относительной простотой базовых уравнений Максвелла для описания квазистационарного электромагнитного поля.

Цель работы. Целью данной статьи является разработка метода численного решения задачи расчета квазистационарного электромагнитного поля для ограниченной в пространстве среды с заданными магнитными и проводящими свойствами, основанного на концепции естественных вторичных источников поля.

Постановка задачи. Задача рассматривается в предположении линейности свойств среды.

Рассмотрим в m-мерном пространстве E_m (m = 2, 3 - размерность пространства) ограниченную область D (в общем случае многосвязную), магнитные свойства которой заданы магнитной проницаемостью $\mu_a = \mu\mu_0$ = const, а проводящие - удельной проводимостью γ=const. Вне области D $\mu_a = \mu_0$, а γ = 0. Допускается, что вся область D или отдельные её части могут перемещаться в пространстве со скоростью $\vec{V}$ (очевидно, что при этом может изменяться геометрия области).

Пусть в области $D_{об}$ размещены обмотки с током произвольной плотности $\vec{\delta}_{об}$. Как известно, полная система уравнений для расчета поля в D имеет вид [3]

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{\delta};\ \vec{\delta} = \gamma\left(\vec{E} + \vec{V}\times\vec{B}\right);\ \operatorname{div}\vec{\delta} = 0; \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t};\vec{B} = \mu_a\vec{H};\operatorname{div}\vec{B} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

при условиях сопряжения $H_{it}=H_{et}$, $B_{in}=B_{en}$, δ_n=0 на границе S области D.

Здесь $\vec{B}$ - вектор магнитной индукции, $\vec{H},\vec{E}$ - векторы напряженности магнитного и электрического полей; все векторы являются функциями координат и времени, например, $\vec{V} \equiv \vec{V}(\vec{r},t)$, $\vec{\delta} \equiv \vec{\delta}(\vec{r},t)$ и т.д.

Будем считать, что первичное поле создается синусоидальными токами заданной плотности $\dot{\vec{\delta}}$, например, токами обмоток $\dot{\vec{\delta}}_{об}(\vec{r})$ (здесь и далее использовано стандартное обозначение для символических векторов).

Для синусоидально изменяющегося во времени с угловой частотой ω поля система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{\delta}};\ \dot{\vec{\delta}} = \gamma\left(\dot{\vec{E}} + \vec{V}\times\dot{\vec{B}}\right);\ \operatorname{div}\dot{\vec{\delta}} = 0; \\ \operatorname{rot}\dot{\vec{E}} = -j\omega\mu\mu_0\dot{\vec{H}};\dot{\vec{B}} = \mu_a\dot{\vec{H}};\operatorname{div}\dot{\vec{B}} = 0\ . \end{cases} \tag{2}$$

Основные расчетные уравнения. На основе системы уравнений (1) в статье авторов [7] для нестационарного электромагнитного поля получено уравнение

$$\vec{U}(\vec{x}) = \frac{1}{\pi(m-1)}\int\limits_{D_{об}}\frac{\vec{\delta}_{об}(\vec{y}_{об})\times\vec{r}}{r^m}d\tau_y + \frac{1}{\pi(m-1)}\int\limits_{D}\frac{\vec{\delta}(\vec{y})\times\vec{r}}{r^m}d\tau_y + 2\int\limits_{D}\hat{K}(\vec{x},\vec{y})\vec{J}[\vec{U}(\vec{y})]d\tau_y + \\ + \frac{m-2}{2}\vec{J}[\vec{U}(\vec{x})];\ \vec{x},\vec{y}\in D,\ \vec{y}_{об}\in D_{об},\ \vec{r} = \vec{x}-\vec{y}\text{ для } D \text{ и } \vec{r} = \vec{x}-\vec{y}_{об}\text{ для } D_{об}, \tag{3}$$

где $\vec{U} = \mu_0^{-1}\vec{B} + \vec{H} = 2\vec{H} + \vec{J}$, $\vec{\delta}$ - вектор плотности вихревых токов, $\hat{K}(\vec{x},\vec{y}) = \nabla_x\nabla_y\dfrac{1}{r} = \left\{K_{ij}(\vec{x},\vec{y})\right\}$ - симметричный тензор второго ранга с компонентами $K_{ij} = \dfrac{\left(m\alpha_i\alpha_j - \delta_{ij}\right)}{2\pi(m-1)r^m}$, α - направляющие косинусы радиуса-вектора $\vec{r}$ [8].

Учитывая, что $\vec{J}=\dfrac{\mu-1}{\mu+1}\vec{U}=\lambda\vec{U}$, для синусоидально изменяющегося поля уравнение (3) принимает вид

$$\dot{\vec{J}}(\vec{x})=\frac{\lambda}{\pi(m-1)}\int\limits_{D_{об}}\frac{\dot{\vec{\delta}}_{об}(\vec{y})\times\vec{r}}{r^{m}}d\tau_{y}+\frac{\lambda}{\pi(m-1)}\int\limits_{D}\frac{\dot{\vec{\delta}}(\vec{y})\times\vec{r}}{r^{m}}d\tau_{y}+2\lambda\int\limits_{D}[K(\vec{x},\vec{y})\dot{\vec{J}}(\vec{y})]d\tau_{y}+$$
$$+\frac{m-2}{2}\dot{\vec{J}}(\vec{x});\ \vec{x},\vec{y}\in D,\ \vec{y}_{об}\in D_{об},\ \vec{r}=\vec{x}-\vec{y}\ \text{для}\ D\ \text{и}\ \vec{r}=\vec{x}-\vec{y}_{об}\ \text{для}\ D_{об}. \quad (4)$$

Дополним уравнение (4) связью векторов $\dot{\vec{\delta}}$ и $\dot{\vec{J}}$. Согласно (2) в области D

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{\delta}}=\frac{\mu\mu_{0}\gamma}{\mu-1}[-j\omega\dot{\vec{J}}+\operatorname{rot}(\vec{V}\times\dot{\vec{J}})]. \quad (5)$$

Учтем, что $\operatorname{rot}(\vec{V}\times\dot{\vec{J}})=(\dot{\vec{J}}\cdot\nabla)\vec{V}-(\vec{V}\cdot\nabla)\dot{\vec{J}}+\vec{V}(\nabla\cdot\dot{\vec{J}})-\dot{\vec{J}}(\nabla\cdot\vec{V})$ [9] и $\nabla\cdot\dot{\vec{J}}=0$, $\nabla\cdot\vec{V}=0$. Поэтому уравнение (5) можно представить в эквивалентной форме

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{\delta}}=\frac{\mu\mu_{0}\gamma}{\mu-1}[-j\omega\dot{\vec{J}}+\left(\dot{\vec{J}}\cdot\nabla\right)\vec{V}-\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\dot{\vec{J}})]. \quad (6)$$

Дополняя (6) уравнением $\operatorname{div}\dot{\vec{\delta}}=0$, по теореме Гельмгольца получим

$$\dot{\vec{\delta}}(\vec{x})=-\frac{\mu\mu_{0}\gamma}{2\pi(m-1)(\mu-1)}\int\limits_{D}\left[-j\omega\dot{\vec{J}}(\vec{y})+(\dot{\vec{J}}\cdot\nabla)\vec{V}-(\vec{V}\cdot\nabla)\dot{\vec{J}}\right]\times\frac{\vec{r}}{r^{m}}d\tau_{y};\ \vec{x},\vec{y}\in D. \quad (7)$$

Известно [9], что при отсутствии дополнительных граничных условий по дивергенции и ротору некоторого вектора его можно восстановить с точностью до некоторого вектора, являющегося градиентом любой гармонической функции. Поэтому в общем случае выражение (7) не является общим выражением для расчета плотности токов. Внутренняя задача имеет однозначное решение, если вдоль границы S области D задана нормальная проекция вектора $\dot{\vec{\delta}}$: $(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\delta}})\big|_{s}=g(S)$. При этом решение задачи существует, если $\operatorname{div}\dot{\vec{\delta}}=0$ и $\int\limits_{D}\operatorname{div}\dot{\vec{\delta}}d\tau=\int\limits_{S}g(S)dS$, т.е. $\int\limits_{S}g(S)dS=0$. Решение (7) является единственным, если к нему прибавить вектор-функцию $\dot{\vec{\delta}}'=\nabla\psi$, где ψ - скалярный потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа. Функция ψ определяется из решения внутренней задачи Неймана с краевым условием $\left.\dfrac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\right|_{S}=g(S)-(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\delta}})=-(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\delta}})$.

Рассмотрим важный частный случай двумерной задачи для неподвижной области D (m=2, $\vec{V}$=0). При этом вектор $\dot{\vec{\delta}}$ имеет только составляющую нормальную к области D, поэтому задача Неймана имеет нулевое граничное условие, т.е. сводится к задаче Робена с тривиальным (нулевым) решением. Таким образом, в этом случае система уравнений (4) и (7) принимает вид

$$\dot{\vec{J}}(\vec{x})=\frac{\lambda}{\pi}\int\limits_{D_{об}}\frac{\dot{\vec{\delta}}_{об}(\vec{y})\times\vec{r}}{r^{2}}d\tau_{y}+\frac{\lambda}{\pi}\int\limits_{D}\frac{\dot{\vec{\delta}}(\vec{y})\times\vec{r}}{r^{2}}d\tau_{y}+2\lambda\int\limits_{D}[K(\vec{x},\vec{y})\dot{\vec{J}}(\vec{y})]d\tau_{y}; \quad (8)$$

$$\dot{\vec{\delta}}(\vec{x})=\frac{q}{2\pi}\int\limits_{D}\left(\dot{\vec{J}}(\vec{y})\times\frac{\vec{r}}{r^{2}}\right)d\tau_{y}, \quad (9)$$

где $q=-\dfrac{j\omega\mu\mu_{0}\gamma}{\mu-1}$, и дает решение поставленной задачи.

Численная реализация метода. Для численной реализации уравнений (8), (9) необходимо выполнить дискретизацию области D путем ее триангуляции: $D\equiv\cup D_{k}$, k = 1, 2, …, p.. Пусть $\dot{\vec{J}}_{k}$, $\dot{\vec{\delta}}_{k}$ соответственно комплексные векторы намагниченности и плотности вихревых токов в центре треугольника D_{k}, причем $\dot{\vec{J}}_{k}$ и $\dot{\vec{\delta}}_{k}$ постоянны в D_{k}. Тогда вместо (8) и (9) можно записать:

$$\dot{\vec{J}}_k \equiv \dot{\vec{J}}(\vec{x}_k) = \frac{\lambda}{\pi}\dot{\vec{H}}_{0k} + \frac{\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{p}\int_{D_n}\frac{\dot{\vec{\delta}}_n \times \vec{r}}{r^2}d\tau_n + 2\lambda\sum_{n=1}^{p}\int_{D_n}\tilde{K}\left(\vec{x}_k, \vec{y}_n\right)\dot{\vec{J}}_n\, d\tau_n; \qquad (10)$$

$$\dot{\vec{\delta}}_k = \frac{q}{2\pi}\sum_{n=1}^{p}\int_{D_n}\left(\dot{\vec{J}}_n \times \frac{\vec{r}}{r^2}\right)d\tau_n = \vec{i}_3\dot{\delta}_k\,,\ k, n = 1, 2, \ldots, p. \qquad (11)$$

Здесь $\dot{\vec{H}}_{0k}$ – поле первичных источников, определяемое в центре каждого треугольника D_k интегрированием по области $D_{об}$ согласно (8). Более подробно рассмотрим вычисление других интегралов. Введем обозначение [8]:

$$\Pi\vec{J} = 2\int_D \tilde{K}(\vec{x}, \vec{y})\dot{\vec{J}}(\vec{y})d\tau_y\,. \qquad (12)$$

В двумерном случае для вычисления интеграла (12) удобно воспользоваться комплексными числами. Справедливо соответствие [8]

$$\Pi\vec{J} = -\overline{\Pi}\overline{J} = \frac{1}{\pi}\int_D \frac{\overline{J}(y)}{(\overline{y} - \overline{x})^2}d\tau_y\,. \qquad (13)$$

В последнем выражении черта над комплексными числами J, x, y означает операцию сопряжения. Оператор ΠJ_k для области D_k можно представить в виде [8]

$$\Pi J_k = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_D \partial_y J\frac{d\tau_y}{y - x} - \frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{J(y)d\overline{y}}{y - x}\,,$$

где Γ – граница области D_k. При $\mu = \mathrm{const}$

$$\Pi J_k = -\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{J\, d\overline{y}}{y - x}\,. \qquad (14)$$

Последний интеграл для произвольного треугольника вычислен в [10] аналитически.

Следует иметь в виду, что при выполнении операций в (13) и (14) комплексные числа принимались как векторы. При вычислении оператора $\Pi\dot{\vec{J}}$ в (10) необходимо перейти к векторным аналогам. С этой целью представим комплексные векторы в виде:

$$\dot{\vec{J}} = \vec{U} + j\vec{V}\,,\ \vec{U} = \vec{i}_1 u_1 + \vec{i}_2 u_2\,,\ \vec{V} = \vec{i}_1 v_1 + \vec{i}_2 v_2 \qquad (15)$$

или

$$\dot{\vec{J}} = \vec{i}_1(u_1 + jv_1) + \vec{i}_2(u_2 + jv_2) = \vec{i}_1\dot{J}_1 + \vec{i}_2\dot{J}_2 \qquad (16)$$

где $\dot{J}_1$ и $\dot{J}_2$ - комплексы синусоидальных функций.

Вводя комплексные аналоги векторов $\vec{U}$ и $\vec{V}$:

$$U = u_1 + ju_2\,,\ V = v_1 + jv_2\,,$$

можно записать $\Pi\dot{\vec{J}} = \Pi\vec{U} + j\Pi\vec{V}$, причем:

$$-\overline{\Pi}\overline{U} = \mathrm{Re}(-\overline{\Pi}\overline{U}) + j\,\mathrm{Im}(-\overline{\Pi}\overline{U}) = \Pi_{Ux} + j\Pi_{Uy}\,;$$

$$\Pi\vec{U} = \vec{i}_1\Pi_{Ux} + \vec{i}_2\Pi_{Uy}\,,$$

$$-\overline{\Pi}\overline{V} = \Pi_{Vx} + j\Pi_{Vy}\,;$$

$$\Pi\vec{V} = \vec{i}_1\Pi_{Vx} + \vec{i}_2\Pi_{Vy}\,.$$

Теперь можно записать

$$\Pi\dot{\vec{J}} = \vec{i}_1(\Pi_{Ux} + j\Pi_{Vx}) + \vec{i}_2(\Pi_{Uy} + j\Pi_{Vy}) = \vec{i}_1\dot{C} + \vec{i}_2\dot{D}\,, \qquad (17)$$

или в эквивалентной форме

$$\Pi\dot{\vec{J}} = \vec{A} + j\vec{B}\,,\ \vec{A} = \vec{i}_1\Pi_{Ux} + \vec{i}_2\Pi_{Uy}\,,\ \vec{B} = \vec{i}_1\Pi_{Vx} + \vec{i}_2\Pi_{Vy}\,. \qquad (18)$$

При вычислении интеграла (11) учтем, что $\frac{\vec{r}}{r^2} = \mathrm{grad}(\ln r)$, а $\mathrm{rot}(\dot{\vec{J}}_n \ln r) = \ln r \cdot \mathrm{rot}\,\dot{\vec{J}}_n + \mathrm{grad}(\ln r) \times \dot{\vec{J}}_n$.

Учитывая, что при $\dot{\vec{J}}_n = \text{const}$ $\operatorname{rot}\dot{\vec{J}}_n = 0$ и применяя теорему Стокса, получим

$$\int_{D_n} \dot{\vec{J}}_n \times \frac{\vec{r}}{r^2} d\tau_n = -\int_{D_n} \operatorname{rot}(\dot{\vec{J}}_n \ln r) d\tau_n = -\vec{i}_3 \int_{D_n} \operatorname{rot}(\dot{\vec{J}}_n \ln r) d\tau_n = -\vec{i}_3 \int_{\Gamma_n} (\dot{\vec{J}}_n \ln r)\cdot d\vec{l}_n \,, \tag{19}$$

$$\dot{\vec{\delta}}_k = -\vec{i}_3 \frac{q}{2\pi} \sum_{n=1}^{p} \int_{\Gamma_n} (\dot{\vec{J}}_n \cdot d\vec{l}_n) \ln r = \vec{i}_3 \dot{\delta}_k \,. \tag{20}$$

Интеграл в (20) вычисляется аналитически (из-за громоздкости соответствующие выкладки здесь не приводятся).

Наконец, интеграл от $\dot{\vec{\delta}}$ в (10) можно записать так:

$$\int_{D_n} \frac{\dot{\vec{\delta}}_n \times \vec{r}}{r^2} d\tau_n = \int_{D_k} \frac{\vec{i}_3 \dot{\delta}_n \times (\vec{i}_1 r_1 + \vec{i}_2 r_2)}{r^2} d\tau_n = \vec{i}_1 \dot{\delta}_n \int_{D_n} \frac{(-r_1)}{r^2} d\tau_n + \vec{i}_2 \dot{\delta}_n \int_{D_n} \frac{r_2}{r^2} d\tau_n \,,\ \vec{r} = \vec{i}_1 r_1 + \vec{i}_2 r_2 \,. \tag{21}$$

Система уравнений (10) и (11) после вычисления соответствующих коэффициентов может быть представлена в матричном виде системой трех систем линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \left\|\dot{\mathbf{J}}_1\right\| = \|\mathbf{A}\|\cdot\left\|\dot{\mathbf{J}}_1\right\| - \|\mathbf{B}\|\cdot\left\|\dot{\mathbf{J}}_2\right\| + \|\mathbf{C}\|\cdot\left\|\dot{\delta}\right\| + \left\|\dot{\mathbf{E}}\right\| \\ \left\|\dot{\mathbf{J}}_2\right\| = \|\mathbf{A}\|\cdot\left\|\dot{\mathbf{J}}_2\right\| + \|\mathbf{B}\|\cdot\left\|\dot{\mathbf{J}}_1\right\| + \|\mathbf{D}\|\cdot\left\|\dot{\delta}\right\| + \left\|\dot{\mathbf{F}}\right\| \\ \left\|\dot{\delta}\right\| = \|\mathbf{G}\|\cdot\left\|\dot{\mathbf{J}}_1\right\| + \|\mathbf{H}\|\cdot\left\|\dot{\mathbf{J}}_2\right\|, \end{cases} \tag{22}$$

где $\left\|\dot{\mathbf{J}}_1\right\|$, $\left\|\dot{\mathbf{J}}_2\right\|$, $\left\|\dot{\delta}\right\|$, $\left\|\dot{\mathbf{E}}\right\|$, $\left\|\dot{\mathbf{F}}\right\|$ - комплексные матрицы-столбцы размерности p с элементами $\dot{J}_{1k}$, $\dot{J}_{2k}$, $\dot{\delta}_k$, $\frac{\lambda}{\pi}\dot{H}_{01k}$, $\frac{\lambda}{\pi}\dot{H}_{02k}$, k=1, 2, … p соответственно; $\|\mathbf{A}\|$, $\|\mathbf{B}\|$, $\|\mathbf{C}\|$, $\|\mathbf{D}\|$, $\|\mathbf{G}\|$,$\cdot$ $\|\mathbf{H}\|$ - вещественные квадратные матрицы размерности $p{\times}p$ с соответствующими элементами:

$$a_{kn} = -\operatorname{Re}\left(\frac{\lambda}{2\pi j}\oint_{\Gamma_n}\frac{d\bar{y}}{y_n - x_k}\right), y_n \in \Gamma_n,\ x_k \in D_k;\ b_{kn} = -\operatorname{Im}\left(\frac{\lambda}{2\pi j}\oint_{\Gamma_n}\frac{d\bar{y}}{y_n - x_k}\right), y_n \in \Gamma_n,\ x_k \in D_k;$$

$$c_{kn} = \frac{-\lambda}{\pi}\int_{D_n}\frac{r_{1kn}}{r_{kn}^2}d\tau_n, \quad d_{kn} = \frac{\lambda}{\pi}\int_{D_n}\frac{r_{2kn}}{r_{kn}^2}d\tau_n,\ \vec{r}_{kn} = \vec{i}_1 r_{1kn} + \vec{i}_2 r_{2kn};\ k,n = 1,\ 2,\ \ldots p;$$

$$g_{kn} = -\frac{q}{2\pi}\int_{\Gamma_n}\ln r_{kn} dl_{1n}\,,\ h_{kn} = -\frac{q}{2\pi}\int_{\Gamma_n}\ln r_{kn} dl_{2n},\ d\vec{l}_n = \vec{i}_1 dl_{1n} + \vec{i}_2 dl_{2n}\,.$$

Полученная система уравнений может быть решена итерационным или прямым методом. Примеры численного решения этих уравнений будут предметом отдельного рассмотрения.

Выводы. Таким образом, в работе обоснован метод математического моделирования квазистационарного электромагнитного поля на основе естественных вторичных источников поля - комплексных векторов намагниченности среды и плотности вихревых токов. Задача сведена к двум интегральным уравнениям относительно этих источников. Для двумерного случая получены дискретные аналоги интегральных уравнений в матричном виде. Приведены формулы для расчета коэффициентов матричных уравнений.

Разработанный метод может быть использован для решения практических задач расчета вихревых токов в магнитопроводящих средах при воздействии гармонического электромагнитного поля.

Список литературы

1. **Петрушенко Е.И.** Постановка задачи по расчету вихревых токов в телах произвольной формы // Известия вузов. Электромеханика. – 1966. – № 11. – С. 1181-1184.
2. **Майергойз И. Д.** Интегральные уравнения для расчета трехмерного квазистационарного электромагнитного поля / И.Д. Майергойз, О.В. Тозони // Изв. вузов. Электромеханика. – 1972. – № 4. – С. 343-349.
3. **Тозони О.В., Маергойз И.Д.** Расчет трехмерных электромагнитных полей – К.: Техніка. – 1974. – 352 с.

4. **Галанин М.П., Попов Ю. И.** Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных середах: Математическое моделирование. – М.: Наука. – 1995. – 320 с.
5. **Тихонов Д.Ю.** Комбинированный метод расчета нестационарных плоскопараллельных электромагнитных полей / Д.Ю. Тихонов, А.Н. Ткачев, Й. Центнер // Известия вузов. Электромеханика. – 2002. – №4. – С. 39-48.
6. **Жильцов А.В.** Двумерная интегро-диференциальная модель для расчета вихревых токов в системе кристаллизатор – индукционный перемешиватель с нелинейным масивным магнитопроводом // Электронное моделирование. – 2007. т. 29. – № 6. – С. 37-46.
7. **Толмачев С.Т.** Интегральные уравнения для расчета нестационарного электромагнитного поля / С.Т. Толмачев, А.В. Ильченко, В.А. Власенко // Вісник Криворізького національного університету. – 2012 – Випуск 30. – С. 161-165.
8. **Толмачев С.Т.** Специальные методы решения задач магнитостатики. – К.: Вища школа, 1983. – 166 с.
9. **Корн Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 832 с.
10. **Толмачев С.Т.** Применение обобщенных аналитических функций для исследования статических полей / С.Т. Толмачев, А.В. Ильченко, С.Л. Бондаревский // Вісник Криворізького технічного університету. – 2007. – Випуск 17. – С. 133-138.

Рукопись поступила в редакцию 19.02.13

УДК 621.771.2-52

В.И. БОЙКО©, д-р техн. наук, проф., И.А. АЛЕКСЕЕВ, канд. техн. наук, доц.
В.О.УСТИМЕНКО, ассистент, Ю.Ю.СОЛОМКА, студент
ГВУЗ «Днепродзержинский государственный технический университет»

АДАПТИВНАЯ КОМБИНИРОВАННАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ НАКАТКИ ОРТОПЕДИЧЕСКИХ ПРОФИЛЕЙ

Рассмотрена структура и основные принципы построения адаптивной комбинированной системы управления процессом валковой накатки медицинских цилиндрических профилей повышенной точности. Приведены результаты экспериментального подтверждения эффективности применения предлагаемой системы управления.

Современная номенклатура осесимметричных цилиндрических и резьбовых профилей используемых при изготовлении ортопедического оборудования предъявляет повышенные требования к точности, прочности, износостойкости и шероховатости рабочей поверхности. Одним из наиболее универсальных, позволяющим в большинстве случаев сократить количество операций по обработки поверхности является метод поперечно-профильной накатки [1].

На территории Украины распространение получили универсальные профиленакатные машины серии UPWS (Германия) и их аналоги производства ближнего и дальнего зарубежья (Россия, Швейцария, Япония и т.д.) позволяющие реализовать данный метод формообразования. Совмещение задач скоростного перемещения и точного позиционирования в системе управления приводом подвижного суппорта реализованной в машинах указанного типа, является антагонистичным и не позволяет, без организации дополнительных процедур управления, обеспечить возросшие требования к механическим и геометрическим параметрам накатываемого профиля.

Устранение данного недостатка требует разработки системы управления формообразованием с использованием принципов адаптации (самоприспособления). Структурная схема системы показана на рис. 1.

Для управления процессом формообразования используются следующие датчики технологической информации:

1. ДД - датчик давления рабочей жидкости в полости гидравлической системы привода подвижного инструмента;
2. ДП - датчик перемещения подвижного суппорта в ходе формообразования;
3. ДС - датчик электрического сопротивления очага деформации;
4. ДТ - датчик температуры накатного инструмента.

Исполнительным механизмом является гидравлический привод подвижного инструмента с соответствующими электросиловыми цепями управления и таймером накатки.

Управление обеспечивается следующими пятью контурами регулирования:

1. Основной контур регулирования по текущему отклонению величины рабочего зазора (с полосой пропускания 0-5 Гц).