УДК 621.318.13

С.Т. ТОЛМАЧЕВ[·], доктор техн. наук, проф., А.В. ИЛЬЧЕНКО, канд. техн. наук, доц.,
В.А. ВЛАСЕНКО, ассистент, ГВУЗ «Криворожский национальный университет»

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Обоснована возможность расчета нестационарного электромагнитного поля в достаточно общей постановке на основе метода вторичных источников с использованием естественных векторов поля. Разработана методика учета произвольных магнитных свойств ферромагнитной среды при её движении в пространстве. Проанализированы преимущества предложенного метода по сравнению с другими методами решения аналогичных задач.

Актуальность работы. Проблема исследования электромагнитных полей на основе полевого подхода остается актуальной на протяжении нескольких десятилетий. Наиболее существенные результаты получены на основе численного моделирования задач в полевой постановке. Большинство публикаций в этой области посвящено исследованию особенностей численной реализации методов [1-6], оптимизации параметров вычислительного процесса [2, 4, 7], сравнительному анализу вычислительных схем [1-5], развитию и совершенствованию комбинированных подходов [8-11]. Следует, однако, отметить, что эффективность и адекватность предложенных методов во многих случаях существенно снижается за счет достаточно грубых упрощающих предположений, что объясняется как ограниченными вычислительными возможностями ЭВМ, так и недостаточным развитием методов решения полевых задач в усложненной и максимально приближенной к реальным условиям постановке. Характерно, что на фоне быстро растущих вычислительных возможностей ЭВМ в последние годы активно развиваются комбинированные, численно-аналитические и др. неклассические подходы. При этом изменяются приоритеты в оценке возможностей применения основных методов. Так, активно развивавшийся в последние десятилетия прошлого столетия метод интегральных уравнений (МИУ) в настоящее время по количеству практических реализаций значительно уступает методу конечных элементов (МКЭ). Однако известные преимущества МИУ, в первую очередь его численно-аналитический характер, могут во многих случаях вернуть ему лидирующие позиции. Например, при моделировании полевых задач с учетом нелинейных анизотропных свойств среды, когда концепция магнитной проницаемости как основной характеристики магнитного состояния теряет смысл, реализация МКЭ значительно осложняется. Можно утверждать, что МИУ относительно естественных векторных источников поля более устойчив к усложнению постановки полевых задач, чем другие методы, в том числе и метод фиктивных вторичных источников [2].

Цель работы. Целью данной статьи является разработка метода решения нестационарных задач расчета электромагнитного поля при минимальных упрощающих предположениях. В основу предлагаемого подхода положен метод векторных интегральных уравнений, получивший развитие в работах [3,5,6,12].

Постановка задачи. Рассмотрим в m-мерном пространстве E_m (m=2, 3 - размерность пространства) область D (в общем случае многосвязную), магнитные свойства которой заданы произвольным векторным соотношением $\vec{B}=\vec{B}(\vec{H})$, а проводящие – удельной проводимостью γ. Вне области D $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$, а γ=0. Допускается, что вся область D или отдельные её части могут перемещаться в пространстве со скоростью $\vec{V}$ (очевидно, что при этом может изменяться геометрия области). Пусть в области $D_{об}$ размещены обмотки с током произвольной плотности $\vec{\delta}_{об}$. Как известно, полная система уравнений для расчета поля в D имеет вид

$$\begin{cases}\operatorname{rot}\vec{H}=\vec{\delta};\ \vec{\delta}=\gamma\left(\vec{E}+\vec{V}\times\vec{B}\right);\ \operatorname{div}\vec{\delta}=0;\\ \operatorname{rot}\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t};\vec{B}=\vec{B}(\vec{H});\operatorname{div}\vec{B}=0\end{cases} \tag{1}$$

при известных граничных условиях: $H_{it}=H_{et}$, $B_{in}=B_{en}$, δ_n=0 на границе S области D.

Здесь $\vec{B}$ – вектор магнитной индукции, $\vec{H},\vec{E}$ – векторы напряженности магнитного и электрического полей; все векторы есть функции координат и времени, например $\vec{V} \equiv \vec{V}(\vec{r},t)$, $\delta \equiv \delta(\vec{r},t)$ и т.д.

Будем считать известными функции $\vec{\delta}_{\text{об}}$ (первичные источники поля) и $\vec{V}$, включая точку t=0. После определения неизвестных в системе уравнений (1) поле в произвольной точке пространства E_m легко находится интегрированием по всем источникам поля (первичным и вторичным).

В простейшем случае $\vec{B} = \mu\vec{H}$ решение можно искать введением электродинамических потенциалов φ и A. В случае произвольной зависимости $\vec{B}(\vec{H})$, включая случай анизотропии, векторного гистерезиса, магнитной вязкости и другие особенности, присущие реальным ферромагнетикам, концепция магнитной проницаемости неприменима, поэтому используем метод естественных вторичных источников, которыми являются векторы плотности токов проводимости $\vec{\delta}$ и намагниченности среды $\vec{J}$. Очевидно, эти источники отсутствуют вне D, что является одним из преимуществ МИУ.

Основные расчетные уравнения. Введем в рассмотрение расчетный вектор

$$\vec{U} = \mu_0^{-1}\vec{B} + \vec{H} = \tilde{\vec{B}} + \vec{H} = 2\vec{H} + \vec{J} = 2\vec{B} - \vec{J}\ . \tag{2}$$

Очевидно, в области D

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{U} = \operatorname{rot}\tilde{\vec{B}} + \operatorname{rot}\vec{H} = 2\operatorname{rot}\vec{H} + \operatorname{rot}\vec{J} = 2\gamma\left(\vec{E} + \vec{V}\times\vec{B}\right) + \operatorname{rot}\vec{J}, \\ \operatorname{div}\vec{U} = \operatorname{div}\vec{B} + \operatorname{div}\vec{H} = \text{-}\operatorname{div}\vec{J}. \end{cases} \tag{3}$$

По теореме разложения Гельмгольца [13] можно записать

$$\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2;\ \vec{\nabla}\times\vec{U}_1 = 0,\ \nabla\cdot\vec{U}_2 = 0, \tag{4}$$

т.е. вектор-функцию $\vec{U}$ можно восстановить по её ротору и дивергенции в виде суммы безвихревого (потенциального) поля $\vec{U}_1$ и соленоидального поля $\vec{U}_2$ с точностью до произвольного поля $\vec{U}_0$, для которого $\nabla^2\vec{U}_0 = 0$.

При использовании теоремы Гельмгольца возможны два случая:

если $\operatorname{div}\vec{U} = Q(\vec{x})$ и $\operatorname{rot}\vec{U} = \vec{j}(\vec{x})$ определены в каждой точке $\vec{x}\in D$, то всюду в D функция $\vec{U}$ (см. (4)) однозначно определена при дополнительном условии задания $\vec{U}_n(\vec{x})$ в каждой точке границы S;

если в каждой точке пространства $\vec{x} \in E_m$ заданы $\operatorname{div}\vec{U}$ и $\operatorname{rot}\vec{U}$, то формулы (4) определяют $\vec{U}_1$ и $\vec{U}_2$, а следовательно, и $\vec{U}$ однозначно с точностью до такого слагаемого $\vec{U}_0$, для которого $\nabla^2\vec{U}_0 = 0$.

Зададим в каждой точке $\vec{x} \in E_m$ функции

$$Q(\vec{x}) = \begin{cases} \text{-}\operatorname{div}\vec{J}(\vec{x}), \vec{x}\in D, \\ 0, \vec{x}\in E\setminus D. \end{cases} \quad \text{и} \quad \vec{j}(\vec{x}) = \begin{cases} 2\vec{\delta} + \operatorname{rot}\vec{J}, \vec{x}\in D, \\ 2\vec{\delta}_{\text{об}},\ \vec{x}\in D_{\text{об}}, \\ 0,\ \vec{x}\in E\setminus\left(D \cup D_{\text{об}}\right). \end{cases} \tag{5}$$

Очевидно,

$$\vec{U}_1(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi(m-1)}\int_D \operatorname{div}\vec{J}(\vec{y})\cdot\frac{\vec{r}}{r^m}dV_y\,, \tag{6}$$

$$\vec{U}_2(\vec{x}) = \frac{1}{\pi(m-1)} \int\limits_{D_{об}} \frac{\vec{\delta}_{об}(y) \times \vec{r}}{r^m} dV_y + \\ + \frac{1}{\pi(m-1)} \int\limits_D \frac{\vec{\delta} \times \vec{r}}{r^m} dV + \frac{1}{2\pi(m-1)} \int\limits_D \frac{\mathrm{rot}\,\vec{J}(y) \times \vec{r}}{r^m} dV_y\,. \tag{7}$$

Здесь $\vec{r} = \vec{x} - \vec{y}$, интегрирование ведется по всем $\vec{x} \in E_m$.

Для определения функции $\vec{U}_0(\vec{x})$ введем на границе S простые слои зарядов плотностью $\mathrm{Div}\,\vec{J} = \vec{n} \cdot \vec{J}$ и токов плотностью $\mathrm{Rot}\,\vec{J} = \vec{n} \times \vec{J}$

$$\vec{U}_0(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi(m-1)} \int\limits_S \left[\frac{\mathrm{Div}\,\vec{J} \cdot \vec{r}}{r^m} + \frac{\mathrm{Rot}\,\vec{J} \times \vec{n}}{r^m} \right] ds_y\ , \tag{8}$$

которая, очевидно, удовлетворяет условию $\nabla^2 \vec{U}_0 = 0$.

Для упрощения объединим в выражениях (6)-(8) интегралы, связанные с вектором намагниченности среды $\vec{J}$. Введем интегральный оператор

$$\Pi\,\vec{J} = \tilde{\vec{B}}_J + \vec{H}_J = 2\vec{H}_J + \vec{J}\,, \tag{9}$$

где $\vec{H}_J$ - напряженность, обусловленная намагниченностью среды

$$\vec{H}_J = -\mathrm{grad}_x\,\varphi_J = -\mathrm{grad}_x \frac{1}{2\pi(m-1)} \int\limits_{D_\varepsilon} \frac{\vec{J}(\vec{y}) \cdot \vec{r}}{r^m} dV = \int\limits_{D_\varepsilon} \hat{K}(\vec{x},\vec{y}) \cdot \vec{J}(y) dV_j - \frac{1}{m}\vec{J}(\vec{x}). \tag{10}$$

Здесь $\hat{K}(\vec{x},\vec{y}) = \nabla_x \nabla_y \frac{1}{r} = \left\{ K_{ij}(\vec{x},\vec{y}) \right\}$ - симметричный тензор второго ранга с компонентами

$$K_{ij} = \frac{\left(m\alpha_i\alpha_j - \delta_{ij}\right)}{2\pi(m-1)r^m},$$

α – направляющие косинусы радиус-вектора $\vec{r}$.

Таким образом,

$$\Pi\,\vec{J}(\vec{x}) = 2\int\limits_{D_\varepsilon} \hat{K}(\vec{x},\vec{y}) \vec{J}(y) d\tau_y + \frac{m-2}{m}\vec{J}(\vec{x}) \tag{11}$$

Последнее выражение можно записать в другой форме, удобной для практических вычислений [12]

$$\Pi\,\vec{J}(\vec{x}) = \frac{1}{\pi(m-1)} \int\limits_{D_\varepsilon} \frac{m\left(\vec{J} \cdot \vec{r}\right) \cdot \vec{r} - \vec{J}r^2}{r^{m+2}} d\tau_y + \frac{m-2}{m}\vec{J}(\vec{x}).$$

Заметим, что поскольку ядро $\hat{K}(\vec{x},\vec{y})$ допускает оценку 0 (r^{-m}), интеграл в (10) не существует в обычном смысле и его следует понимать в смысле главного значения Коши. Для исключения неинтегрируемой особенности вырежем точку $\vec{x}$ m-мерной сферой, поле $\vec{H}_J$ которой равно $-\frac{\vec{J}(\vec{x})}{m}$, что и отражено в соотношениях (10), (11).

Поскольку

$$\vec{H}_J(x) = \frac{1}{2\pi(m-1)} \int\limits_D \frac{\mathrm{div}\,\vec{J}(y)\vec{r}}{r^m} d\tau_y + \frac{1}{2\pi(m-1)} \oint \frac{\mathrm{Div}\,\vec{J}(y) \cdot \vec{r}}{r^m} ds_y\,, \tag{12}$$

$$\tilde{\vec{B}}_J(x) = \frac{1}{2\pi(m-1)} \int\limits_D \frac{\left(\mathrm{rot}\,\vec{J}\right) \times \vec{r}}{r^m} d\tau_y + \frac{1}{2\pi(m-1)} \oint \frac{\left(\mathrm{Rot}\,\vec{J}(y)\right) \times \vec{r}}{r^m} ds_y\,, \tag{13}$$

с учетом (9) последние интегральные соотношения можно заменить одним (см. (11)).

Таким образом, обобщая соотношения (4), (6)-(8), получим

$$\vec{U}(x)=\frac{1}{\pi(m-1)}\int_{D_{\text{ìá}}}\frac{\vec{\delta}_{\text{ìá}}(\vec{y})\times\vec{r}}{r^m}d\tau_y+\frac{1}{\pi(m-1)}\int_D\frac{\vec{\delta}\times\vec{r}}{r^m}d\tau_y+$$
$$+2\int_D\hat{K}(\vec{x},\vec{y})\vec{J}[\vec{U}(\vec{y})]d\tau_y+\frac{m-2}{2}\vec{J}[\vec{U}(\vec{x})]. \tag{14}$$

Достоинством этого уравнения является не только существенное сокращение количества интегральных операторов (один вместо четырех) и отсутствие дифференциальных функций $\operatorname{div}\vec{J}$ и $\operatorname{rot}\vec{J}$, а и обеспечение естественного учета произвольных магнитных свойств включением векторной модели $\vec{J}\equiv\vec{J}(\vec{U})$, которая может быть получена из материальных уравнений $\vec{B}(\vec{H})$ или $\vec{J}(\vec{H})$. В простейшем случае μ=const легко получить: $\vec{J}=\lambda\vec{U}$, где λ=(μ-1)/(μ+1). Для произвольной зависимости $\vec{B}=\vec{B}(\vec{H})$ эту функцию всегда можно преобразовать в модифицированную функцию магнитного состояния $\vec{J}(\vec{U})$, используя соотношения (2).

Входящий в (14) вектор плотности тока $\vec{\delta}=\gamma\left[\vec{E}+\vec{V}\times\vec{B}\right]$ также необходимо выразить через вектор $\vec{U}$. Очевидно,

$$\operatorname{rot}\frac{\vec{\delta}}{\gamma}=\operatorname{rot}\vec{E}+\operatorname{rot}(\vec{V}\times\vec{B})=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{V}-(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{B}+\vec{V}(\nabla\cdot\vec{B})-\vec{B}(\nabla\cdot\vec{V}),$$

причем $\nabla\cdot\vec{B}=\operatorname{div}\vec{B}=0$, $\nabla\cdot\vec{V}=\operatorname{div}\vec{V}=0$, т.е. $\operatorname{rot}\frac{\vec{\delta}}{\gamma}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{V}$.

Справа со знаком «–» производная от $\vec{B}$ по времени, определяющая изменение вектора $\vec{B}$ по отношению к движущемуся телу. Действительно [14]

$$\frac{\partial B}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{B}=\frac{d\vec{B}}{dt}$$

есть «субстанциональная производная» по времени, дающая изменение магнитной индукции $\vec{B}$ в точке, движущейся со скоростью $\vec{V}$, третий же член учитывает изменение ориентации вектора $\vec{B}$ по отношению к телу: при $\vec{V}=\text{const}$, $(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{V}=0$, при вращении $\vec{V}=\vec{\Omega}\times\vec{r}$, а $(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{V}=-\vec{\Omega}\times\vec{r}$.

Таким образом, в области *D*

$$\operatorname{rot}\vec{\delta}=-\gamma\frac{d\vec{B}}{dt}+\gamma(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{V},\ \operatorname{div}\vec{\delta}=0.$$

Тогда по теореме разложения Гельмгольца [14]

$$\vec{\delta}=-\frac{\gamma}{2\pi(m-1)}\left[\int_{D_{\text{ст}}}\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\times\frac{\vec{r}}{r^m}\right)d\vec{V}_y+\int_{D_{\text{дв}}}\left[\frac{d\vec{B}}{dt}-(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{V}\right]\frac{\vec{r}}{r^m}\right], \tag{15}$$

где $D_{\text{ст}}$ и $D_{\text{дв}}$ - неподвижная и движущаяся части области *D*, а в соответствии с (2) $\vec{B}=\frac{1}{2}(\vec{U}-\vec{J}(U))$. Решение (15) единственно при условии $\vec{\delta}_n=0$ на границе *S*, что выполняется, поскольку γ=0 вне области *D*.

Таким образом, система векторных интегральных уравнений (14), (15) относительно векторов $\vec{\delta}$ и $\vec{U}$ решает поставленную задачу.

Выводы. Метод векторных интегральных уравнений развит на случай нестационарных задач расчета электромагнитного поля при минимальных упрощающих предположениях. Введение специального расчетного вектора поля позволило получить основное интегральное уравнение, которое обеспечивает учет произвольных магнитных свойств включением естественный векторной модели магнитного состояния среды без определения дифференциальных операторов и магнитной проницаемости среды. Предложенный метод предусматривает возможность учета произвольного закона изменения во времени первичного поля и движения ферромагнитных областей в пространстве с заданной произвольной скоростью.

Список литературы

1. **Демирчян К.С.** Машинные расчеты электромагнитных полей / **К.С. Демирчян, В.Л. Чечурин.** – М: Высшая школа, 1986. – 240 с.
2. **Тозони О.В.** Расчет трехмерных электромагнитных полей / **О.В. Тозони, И.Д. Маергойз**. – К.: Техніка, 1974. – 352 с.
3. **Толмачев С.Т.** Интегральные уравнения магнитостатики / **С.Т. Толмачев** // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1978. – №3. – С. 113-123.
4. **Курбатов П.А.** Численный расчет электромагнитных полей / **П.А. Курбатов, С.А. Аринчин**. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 168 с.
5. **Ильченко А.В.** Метод векторных интегральных уравнений для задач магнитостатики и его численная реализация / **А.В. Ильченко, П.С. Смолянский, С.Т. Толмачев** // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1988. – №3. – С. 128-132.
6. **Толмачев С.Т.** Математическое моделирование магнитного поля с учетом нелинейных анизотропных свойств среды / **С.Т. Толмачев, А.В. Ильченко, Ж.Г. Рожненко** // Вестник Национального технического университета (ХПИ): Сб. научн. трудов. Тем. вып. "Проблемы совершенствования электрических машин и аппаратов" – Харьков, 2006. – № 36. – С. 128– 133.
7. **Жильцов А.В.** Двумерная интегро-диференциальная модель для расчета вихревых токов в системе кристаллизатор - индукционный перемешиватель с нелинейным масивным магнитопроводом / **А.В. Жильцов** // Электронное моделирование, 2007. Т. 29, № 6. – С. 37-46.
8. **Павленко А.В.** Обобщенная математическая модель для расчета нестационарных магнитных полей и динамических характеристик электромагнитных механизмов / **А.В. Павленко** // Электричество. 2002. – № 7. – С. 49-53.
9. **Ткачев А.Н.** Комбинированный метод расчета магнитного поля в кусочно-однородных средах / **А.Н. Ткачев** // Сб. статей и кратких научных сообщений сотрудников и аспирантов НГТУ по материалам науч. сессии, посвящ. 100-летию истории университета. Новочеркасск, 2007. Т. 29, №6. – С. 37-46.
10. **Тихонов Д.Ю.** Комбинированный метод расчета нестационарных плоскопараллельных электромагнитных полей / **Д.Ю. Тихонов, А.Н. Ткачев, Й. Центнер** // Изв. вузов. Электромеханика, 2002. – №4. – С. 39-48.
12. **Ковалев О.Ф.** Комбинированные методы моделирования магнитных полей в электромагнитных устройствах / **О.Ф. Ковалев**. Ростов н/Д.: Изд-во СКНЦ ВШ, 2001. – 220 с.
12. **Толмачев С.Т.** Специальные методы решения задач магнитостатики / **С.Т. Толмачев**. – К.: Вища школа, 1983. – 166 с.
13. **Корн Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / **Г. Корн, Т. Корн.** – М.: Наука, 1973. – 832 с.
14. **Ландау Л.Д.** Электродинамика сплошных сред / **Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц**. **–** М.: Наука, 1982. 620 с.

Рукопись поступила в редакцию 02.02.12

УДК 621.3.016

А.П. СІНОЛИЦИЙ* , д-р техн. наук, проф., І.А. КОЗАКЕВИЧ, аспірант
ДВНЗ «Криворізький національний університет»

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ КЛАСИЧНОГО ВЕКТОРНОГО ТА J-M КЕРУВАННЯ

Виконано дослідження нового алгоритму керування асинхронним двигуном - *J-M*. Представлено порівняння нового алгоритму з класичним векторним керуванням з орієнтацією за вектором потокозчеплення ротора.

Проблема та її зв'язок з науковими та практичними завданнями. З розвитком засобів силової електроніки та мікропроцесорної техніки векторне керування стало своєрідним промисловим стандартом в області керування асинхронними двигунами. Його використання дає змогу керувати машиною змінною струму подібним до керування машиною постійного струму чином, що значно покращує можливості її використання в регульованому електроприводі. При цьому для роздільного керування потокозчепленням та моментом двигуна використовуються координатні перетворення. Система координат *d-q*, що обертається синхронно з полем машини, орієнтується таким чином, щоб додатний напрям вісі *d* співпадав з напрямом вектора потокозчеплення ротора. При цьому проекція вектора струму статора на вісь d дозволяє керувати потокозчепленням, а її перпендикулярна складова - електромагнітним моментом машини.

Постановка завдання. У [1,2] представлено новий алгоритм керування асинхронним двигуном, який називається *J-M* керуванням. При цьому автори заявляють, що використання цього алгоритму керування дозволяє збільшити електромагнітний момент, що розвивається двигуном, при тій же амплітуді статорного струму. Отже, є необхідним провести дослідження запро-