

Н.Х. САІТГАРЕЄВ, канд. техн. наук, доц., Н.Н. ШАПОВАЛОВА, ст. викладач  
ДВНЗ «Криворізький національний університет»

## ЧИСЛОВЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

*Викладено застосування числового методу скінченних різниць для розрахунку розподілу температури вздовж радіуса круглого ребра, що застосовується для інтенсифікації тепловіддачі з циліндричних поверхонь труб систем опалення будівель. Порівняння аналітичних і наближених числових величин свідчить про високу ступень адекватності і доцільність застосування числового методу для розрахунку процесів теплотехніки, які успішно моделюються в рамках стаціонарних крайових задач теплопровідності.*

*Изложено применение численного метода конечных разностей для расчета распределения температуры вдоль радиуса круглого ребра, которое применяется для интенсификации теплоотдачи с цилиндрических поверхностей труб систем отопления зданий. Сравнение аналитических и приближенных числовых величин свидетельствует о высокой степени адекватности и целесообразности применения численного метода для расчета процессов теплотехники, которые успешно моделируются в рамках стационарных краевых задач теплопроводности.*

*The application of the numerical finite difference method is used to calculate the temperature distribution along the radius of the round rib, which is used to intensify the heat transfer from the cylindrical surfaces of the pipes of the heating systems of buildings. Comparison of analytical and approximate numerical values indicates about high degree of adequacy and expediency of using a numerical method for calculating heat engineering processes that are successfully modeled within the framework of stationary boundary value problems of heat conduction.*

**Проблема і її зв'язок з науковими і практичними задачами.** При розрахунках різних типів енергетичних і технологічних систем на стадії пошукового конструювання з вибором найбільш оптимального варіанту потрібна всебічна оцінка теплообмінних процесів, знання температурних полів в агрегатах, визначення всіх необхідних енергетичних характеристик з урахуванням експлуатаційних навантажень. Розвиток науки й техніки, сучасна технологія виробництва ставлять перед проектувальниками і дослідниками завдання, для яких одержання розв'язку класичними методами математичного аналізу або неможливо, або є вкрай громіздким і складним. Тому виникає необхідність використовувати різні числові методи, які розроблюються обчислювальною математикою й дозволяють одержати кінцевий числовий результат із прийнятною для практичних цілей точністю.

**Аналіз досліджень і публікацій.** В основі математичної теорії теплопровідності лежить диференціальне рівняння теплопровідності або рівняння Фур'є [1-2]

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c \cdot \rho}, \quad (1)$$

де  $t$  – поточна температура тіла,  $t = f(x, y, z, \tau)$ ;  $x, y, z$  – координати точки;  $\tau$  – час;  $a$  – коефіцієнт температуропровідності,  $a = \lambda / (c \cdot \rho)$ ;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності матеріалу тіла;  $c$  – теплоємність матеріалу тіла;  $\rho$  – щільність матеріалу тіла;  $q_v$  – кількість теплоти, яке виділяється внутрішнім джерелом.

Диференціальне рівняння (1) описує в загальному вигляді всі без винятку задачі теплопровідності. Для вирішення конкретного завдання необхідно до диференціального рівняння приєднати математичний опис частинних її особливостей – так звані крайові умови або умови однозначності. В результаті розв'язання диференціального рівняння теплопровідності спільно з умовами однозначності можна знайти температурне поле, а на підставі закону Фур'є – відповідні теплові потоки.

Задачі для нелінійних рівнянь та навіть лінійні задачі, але в областях складної форми, дуже рідко вдається розв'язати аналітично. Слід відзначити велику кількість навчальної літератури, що стосується інженерних методів розрахунку розподілу температури в багатьох процесах

тепломасопереносу. Не менша й кількість фундаментальних науково-дослідних монографій з теорії числових методів розв'язання крайових задач. Але у розв'язанні актуальних типових задач в даний час використовуються залежності та розрахункові співвідношення, що застосовуються в інженерній практиці [3-6].

Стаття присвячена практичному застосуванню відомих числових методів для розв'язання стаціонарних крайових задач теплопровідності і теплопередачі. Серед них найчастіше застосовують метод скінченних різниць (МСР) завдяки його універсальності й наявності добре розробленої теорії [7-10]. Його реалізація складається з трьох етапів:

1. В області інтегрування вихідного диференціального рівняння встановлюють деяку сітку, що складається в залежності від розмірності задачі з відрізків, прямокутників або паралелепіпедів.
2. Записують різницеву схему, приблизно замінюючи всі похідні, що входять у рівняння й крайові умови, відповідними скінченнорізницевиими співвідношеннями за відповідними незалежними змінними.
3. Різницеву схему записують для кожного вузла сітки, у результаті чого виходить система алгебраїчних рівнянь.
4. Вирішуючи цю систему, знаходять наближений розв'язок задачі у вузлах сітки.
5. Оцінку погрішності здійснюють за допомогою прийому Рунге, за яким крайову задачу розв'язують двічі: із кроком сітки  $h_1$  і із кроком сітки  $h_2 = k h_1$ , де  $k > 1$  – коефіцієнт збільшення кроку. Абсолютну  $\delta$  та відносну  $\varepsilon$  похибку розв'язку, отриманого з меншим кроком  $h_1$ , оцінюють за формулами

$$\delta = \frac{y_i^{(h_1)} - y_i^{(h_2)}}{k^2 - 1}, \quad \varepsilon = \frac{y_i^{(h_1)} - y_i^{(h_2)}}{k^2 y_i^{(h_1)} - y_i^{(h_2)}}, \quad (2)$$

де  $y_i^{(h_1)}$  і  $y_i^{(h_2)}$  – розв'язки, отримані для одного і того ж вузла сітки з різними кроками.

**Постановка завдання.** Відомо, наприклад, що для інтенсифікації тепловіддачі з циліндричних поверхонь труб застосовуються ребра (рис. 1). Ребра в поперечному перерізі можуть мати профіль самої різної конфігурації (коло, прямокутник). Чавунні ребристі труби з круглими ребрами постійної товщини застосовують для систем опалення будівель з теплоносієм температурою до 150 °C і робочим тиском до 0,6 Мпа.



Рис. 1 Труби систем опалення будівель з циліндричними ребрами

Розглянемо таку задачу.

Задано: температура біля основи круглого ребра  $t_1 = 110$  °C, температура навколишнього середовища  $t_c = 10$  °C, коефіцієнт теплопровідності  $\lambda = 15$  Вт/(м·К) і коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha = 37,5$  Вт/(м<sup>2</sup>·К). Для відомих значень внутрішнього  $r_1 = 0,02$  м і зовнішнього  $r_2 = 0,04$  м радіусів ребра товщиною  $\delta = 0,002$  м розрахувати розподіл температури  $t$  в ребрі.

**Викладення матеріалу та результати.** Спочатку виконаємо фізичну і математичну постановку задачі. Для спрощення моделі зробимо кілька припущень, а саме: температуру середовища  $t_c$  і коефіцієнт  $\alpha$  тепловіддачі від всієї поверхні ребра вважатимемо постійними і незалежними від часу. Допускаємо також, що коефіцієнт  $\lambda$  теплопровідності матеріалу ребра досить великий, а товщина ребра дуже мала в порівнянні з його радіусом, що дає підставу знехтувати незначною тепловіддачею з торцевої частині круглого ребра і зміною температури в поперечному перерізі. Крім того, циліндрична симетрія круглого ребра дає підставу вважати, що температура змінюється тільки уздовж радіуса ребра. Після таких припущень стаціонарний

процес теплопровідності в ребрі може бути описаний математично у вигляді одновимірної задачі.

З рівняння балансу енергії для кільцевого елемента ребра товщиною  $\delta$  згідно закону Фур'є і закону Ньютона-Рихмана отримуємо диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} - \frac{2\alpha}{\delta\lambda} (t - t_c) = 0 \quad (3)$$

з крайовими умовами третього роду  $r=r_1: t=t_1; \quad r=r_2: -\lambda \frac{dt}{dr} = 0$ ,

де  $t$  – поточна температура вздовж радіуса  $r$  ребра.

$$\text{Позначимо } \sqrt{\frac{2\alpha}{\delta\lambda}} r = z, \quad \frac{t - t_c}{t_c} = u,$$

(4)

тоді після підстановки (4) в (3) крайова задача (3) приймає вигляд

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du}{dz} - u = 0 \quad (5)$$

з крайовими умовами  $z=z_0: u=u_0; \quad z=z_n: -\frac{du}{dz} = 0$ .

Лінійне диференціальне рівняння другого порядку (5) являє собою рівняння Бесселя. Спеціальні функції Бесселя є рішенням цього рівняння і широко використовуються при розв'язанні задач математичної фізики, наприклад, при дослідженні теплопровідності, поширення хвиль, коливань мембран і багатьох інших задач у випадках, коли об'єкти мають циліндричну або сферичну симетрію. Однак строге аналітичне розв'язання крайової задачі теплопровідності (5) пов'язано зі значними труднощами, та й самі залежності мають громіздкий вигляд, тому частіше використовуються числові методи розв'язання.

Отримаємо розв'язок сформульованої крайової задачі (5) методом скінчених різниць (МСР).

На 1-ому етапі МСР здійснюється побудова сітки в заданій області. Розділимо ширину кільця ребра ( $r_2 - r_1$ ) на  $n$  рівних частин довжиною  $h_2$  і позначимо точки розподілу  $z_0, z_1, \dots, z_n$ . Безрозмірні значення наведеної температури у вузлах сітки позначимо відповідно  $u_0, u_1, \dots, u_n$ , які необхідно обчислити.

У розглянутому прикладі розрахунку згідно з формулою (4)

$$z_0 = \sqrt{\frac{2\alpha}{\delta\lambda}} r_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 37,5}{0,002 \cdot 15}} \cdot 0,02 = 1, \quad z_n = \sqrt{\frac{2\alpha}{\delta\lambda}} r_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 37,5}{0,002 \cdot 15}} \cdot 0,04 = 2.$$

Для першого розрахунку приймаємо  $n = 5$ , тоді  $h_2 = (z_n - z_0)/n = (2-1)/5=0,2$ .

За формулою  $z_i = z_0 + i \cdot h_2$  обчислюємо  $z_1=1,2; z_2=1,4; z_3=1,6; z_4=1,8; z_5=2,0$ . При  $z_0 = 1$  із (4)  $u_0=(t_1 - t_c)/t_c=(110-10)/10=10$ , інші значення  $u_1, u_2, \dots, u_5$  необхідно обчислити.

На 2-ому етапі МСР отримують різницеву схему шляхом наближеною заміни похідних, що входять у диференціальне рівняння і крайові умови, скінченнорізницевими співвідношеннями

$$\frac{d^2 u_i}{dh_2^2} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h_2^2} \quad \text{і} \quad \frac{du_i}{dh_2} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h_2}.$$

На 3-ому етапі МСР, змінюючи значення індексу в різницевій схемі від 1 до  $n$ , отримують повну систему рівнянь.

Для внутрішніх вузлів  $z_i$  ( $1 < i \leq n-1$ ) маємо

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h_2^2} + \frac{1}{z_i} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h_2} - u_i = 0, \quad \text{або}$$

$$(2z_i - h_2) u_{i-1} - 2z_i(2 + h_2^2) u_i + (2z_i + h_2) u_{i+1} = 0. \quad (6)$$

Граничну умову при  $z = z_5$  апроксимуємо

$$z = z_n: \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h_2} = 0. \quad (7)$$

Позначимо коефіцієнти при невідомих різницевої схеми (6) так:  $2z_i - h_2 = a_i$ ;  
 $-2z_i(2+h_2^2) = b_i$ ;  $2z_i+h_2 = c_i$ ;  $d_i=0$  та запишемо (6) послідовно для вузлів сітки  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  і (7)  $u_6 = u_4$  - для  $i = n = 5$ :

$$\begin{aligned} i=1 & a_1u_0 + b_1u_1 + c_1u_2 & = d_1; \\ i=2 & a_2u_1 + b_2u_2 + c_2u_3 & = d_2; \\ i=3 & a_3u_2 + b_3u_3 + c_3u_4 & = d_3; \\ i=4 & a_4u_3 + b_4u_4 + c_4u_5 & = d_4; \\ i=5 & a_5u_4 + b_5u_5 + c_5u_6 & = d_5. \end{aligned} \quad (8)$$

Отримано систему з п'яти різницевих рівнянь з сімома невідомими величинами. Для визначення двох так званих позаконтурних невідомих  $u_0$  і  $u_6$  необхідно додати ще два рівняння, які можна взяти з крайових умов. Оскільки з крайових умов (5)  $u_0=10$  і з крайових умов (7)  $u_6=u_4$ , то можна приписати ці два рівняння до отриманої системи. Однак для збереження тридіагонального виду матриці коефіцієнтів (9) буде доцільно виключити  $u_0$  з першого рівняння і  $u_6$  - з останнього. Після простих перетворень отримуємо наступну систему з п'яти рівнянь із п'ятьма невідомими  $u_1, u_2, \dots, u_5$ :

$$\begin{aligned} i=1 & b_1u_1 + c_1u_2 & = -a_1u_0; \\ i=2 & a_2u_1 + b_2u_2 + c_2u_3 & = 0; \\ i=3 & a_3u_2 + b_3u_3 + c_3u_4 & = 0; \\ i=4 & a_4u_3 + b_4u_4 + c_4u_5 & = 0; \\ i=5 & (a_5 + c_5)u_4 + b_5u_5 & = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Обчислимо коефіцієнти  $a_i, b_i, c_i, d_i$  і запишемо їх у систему

$$\begin{aligned} i=1 & -4,896u_1 + 2,6u_2 & = -22; \\ i=2 & 2,6u_1 - 5,712u_2 + 3u_3 & = 0; \\ i=3 & 3u_2 - 6,528u_3 + 3,4u_4 & = 0; \\ i=4 & 3,4u_3 - 7,344u_4 + 3,8u_5 & = 0; \\ i=5 & 8u_4 - 8,16u_5 & = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

На 4-ому етапі МСР, розв'язавши систему (10) методом алгебраїчної прогонки, визначимо значення температури у вузлах сітки. Почнемо прямий хід прогонки: обчислимо значення прогоночних коефіцієнтів  $G_i$  та  $H_i$  за формулами

$$G_i = \frac{d_i - a_i G_{i-1}}{a_i H_{i-1} + b_i}, \quad H_i = -\frac{c_i}{a_i H_{i-1} + b_i} \quad (i = 2, \dots, 5) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} G_1 & = d_1/b_1 = -22/(-4,896) = 4,4935; \quad H_1 = -c_1/b_1 = 2,6/(-4,896) = 0,5310; \\ G_2 & = (d_2 - a_2 G_1)/(a_2 H_1 + b_2) = (0 - 2,6 \cdot 4,4935)/(2,6 \cdot 0,5310 - 5,712) = 2,6974; \\ H_2 & = -c_2/(a_2 H_1 + b_2) = -3/(2,6 \cdot 0,5310 - 5,712) = 0,6926; \\ G_3 & = (d_3 - a_3 G_2)/(a_3 H_2 + b_3) = (0 - 3 \cdot 2,6974)/(3 \cdot 0,6926 - 6,528) = 1,8184; \\ H_3 & = -c_3/(a_3 H_2 + b_3) = -3,4/(3 \cdot 0,6926 - 6,528) = 0,7640; \\ G_4 & = (d_4 - a_4 G_3)/(a_4 H_3 + b_4) = (0 - 3,4 \cdot 1,8184)/(3,4 \cdot 0,7640 - 7,344) = 1,3026; \\ H_4 & = -c_4/(a_4 H_3 + b_4) = -3,8/(3,4 \cdot 0,7640 - 7,344) = 0,8006; \\ G_5 & = (d_5 - a_5 G_4)/(a_5 H_4 + b_5) = (0 - 8 \cdot 1,3026)/(8 \cdot 0,8006 - 8,1600) = 5,9378. \end{aligned}$$

Обчисливши  $G_5$ , вважаємо це значення як значення кореня  $u_5=5,9378$  і починаємо зворотний хід прогонки за формулою

$$u_i = H_i u_{i+1} + G_i \quad (i = 4, 3, 2, 1), \quad (12)$$

де  $G_i$  і  $H_i$  були обчислені на прямому ході.

$$\begin{aligned} u_4 & = H_4 u_5 + G_4 = 0,8006 \cdot 5,9378 + 1,3026 = 6,0565; \\ u_3 & = H_3 u_4 + G_3 = 0,7640 \cdot 6,0565 + 1,8184 = 6,4458; \\ u_2 & = H_2 u_3 + G_2 = 0,6926 \cdot 6,4458 + 2,6974 = 7,1619; \\ u_1 & = H_1 u_2 + G_1 = 0,5310 \cdot 7,1619 + 4,4935 = 8,2968. \end{aligned}$$

Таким чином отримано рішення крайової задачі вручну з кроком  $h_2 = 0,2$ .

За допомогою Excel [11, 12] отримаємо розв'язок задачі ще раз. Приймаючи крок сітки  $h_1=h_2/2=0,1$ , одержимо методом скінченних різниць систему 10-го порядку, аналогічну системі (9). Обчислимо в Excel  $z_i$ , коефіцієнти системи  $a_i, b_i, c_i, d_i$  і запишемо їх у графі 1-5 табл. 1.

Виконаємо прямий хід прогонки, обчислюючи в Excel коефіцієнти  $G_i$  і  $H_i$  за формулами (12). Результати розрахунку заносимо у 6 і 7 графі табл. 1. Обчисливши  $G_{10}=5,913031$ , переносимо це значення як значення кореня  $u_{10}=5,91301$  у 8 графу того ж рядка й починаємо зворотний хід прогонки за формулою (12).

Результати розв'язання системи 5-го порядку, виконані вручну, запишемо в відповідні рядки графі 10. За формулами (2) обчислимо абсолютні  $\delta$  та відносні похибки  $\varepsilon$  для кожного вузла сітки (при цьому  $k=2$ ) і запишемо отримані значення в графу 11 і 12. Варто зазначити, що навіть з таким відносно великим кроком як  $h_1=0,1$ , у всіх точках відносна похибка  $\varepsilon$  не перевищує 0,14%, що свідчить про високу точність розв'язку.

Таблиця 1

*Розрахунок коефіцієнтів прямого та зворотного ходу методу прогонки*

| $i$ | $z_i$ | $a_i$ | $b_i$  | $c_i$ | $d_i$ | $G_i$   | $H_i$   | $u_i$   | $j$ | $u_j$  | $\delta_i$ | $\varepsilon_i$ |
|-----|-------|-------|--------|-------|-------|---------|---------|---------|-----|--------|------------|-----------------|
|     | 1     | 2     | 3      | 4     | 5     | 6       | 7       | 8       | 9   | 10     | 11         | 12              |
| 1   | 1,1   | 0     | -4,422 | 2,3   | -21   | 4,74898 | 0,52013 | 9,05982 |     |        |            |                 |
| 2   | 1,2   | 2,3   | -4,824 | 2,5   | 0     | 3,01090 | 0,68914 | 8,28806 | 1   | 8,2968 | 0,00291    | 0,00035         |
| 3   | 1,3   | 2,5   | -5,226 | 2,7   | 0     | 2,14871 | 0,77074 | 7,65761 |     |        |            |                 |
| 4   | 1,4   | 2,7   | -5,628 | 2,9   | 0     | 1,63560 | 0,81759 | 7,14759 | 2   | 7,1619 | 0,00477    | 0,00067         |
| 5   | 1,5   | 2,9   | -6,030 | 3,1   | 0     | 1,29633 | 0,84723 | 6,74176 |     |        |            |                 |
| 6   | 1,6   | 3,1   | -6,432 | 3,3   | 0     | 1,05598 | 0,86715 | 6,42735 | 3   | 6,4458 | 0,00615    | 0,00096         |
| 7   | 1,7   | 3,3   | -6,834 | 3,5   | 0     | 0,87723 | 0,88107 | 6,19433 |     |        |            |                 |
| 8   | 1,8   | 3,5   | -7,236 | 3,7   | 0     | 0,73943 | 0,89109 | 6,03479 | 4   | 6,0565 | 0,00724    | 0,0012          |
| 9   | 1,9   | 3,7   | -7,638 | 3,9   | 0     | 0,63025 | 0,89841 | 5,94260 |     |        |            |                 |
| 10  | 2,0   | 8,0   | -8,040 | 0     | 0     | 5,91303 | 0       | 5,91303 | 5   | 5,9378 | 0,00826    | 0,0014          |

Перерахуємо безрозмірну величину температури  $u$  в температуру, виміряну в градусах за Цельсієм, за формулою  $t\text{ }^\circ\text{C} = t_c \cdot u + t_c = 10(u+1)$  (табл. 2).

Таблиця 2

*Результати розв'язку крайової задачі теплопровідності*

|                             |     |       |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----------------------------|-----|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $z_i$                       | 1,0 | 1,1   | 1,2  | 1,3  | 1,4  | 1,5  | 1,6  | 1,7  | 1,8  | 1,9  | 2,0  |
| $u_i$                       | 10  | 9,06  | 8,29 | 7,66 | 7,16 | 6,74 | 6,43 | 6,19 | 6,03 | 5,94 | 5,91 |
| $r_i$ , см                  | 0   | 0,2   | 0,4  | 0,6  | 0,8  | 1,0  | 1,2  | 1,4  | 1,6  | 1,8  | 2,0  |
| $t_i$ , $^\circ\text{C}$    | 110 | 100,6 | 92,9 | 86,6 | 81,6 | 77,4 | 74,3 | 71,9 | 70,3 | 69,4 | 69,1 |
| Аналітичний розв'язок $u_i$ | 10  |       | 8,27 |      | 7,11 |      | 6,37 |      | 5,97 |      | 5,84 |

В останньому рядку табл. 2 наведені значення температури, що отримані аналітично з використанням необхідних величин функцій Бесселя, запозичених з задачника [3]. Порівняння точних і наближених величин  $u_i$ , наведених у другому рядку тієї ж таблиці, свідчить про високий ступень їх відповідності (адекватність).

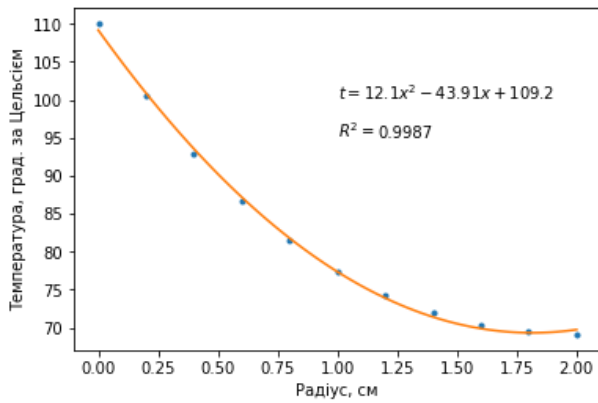


Рис. 2 Розподіл температури вздовж радіуса круглого ребра

Таким чином за допомогою числового методу кінцевих різниць отримано розподіл температури в круглих ребрах постійної товщини ребристої труби, що застосовують для систем опалення будівель.

**Висновки та напрямок подальших досліджень.** Проведені обчислювальні експерименти показали можливість досить точно і просто визначати температурні поля теплоенергетичних пристроїв і розв'язувати задачі теплопровідності за допомогою МСР.

#### Список літератури

1. **Карташев Э. М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э. М. Карташев; изд. 3-е, перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 2001. – 550 с.
2. **Крейт Ф.** Основы теплопередачи / Ф. Крейт, У. Блэк; пер. с англ. – М. : Мир, 1983. – 512 с.
3. **Исаченко В. П.** Теплопередача : учеб. для вузов / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел; – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Энергоиздат, 1981. – 416 с.
4. **Краснощеков Е. А.** Задачник по теплопередаче: учеб. пособие для вузов / Е. А. Краснощеков, А. С. Сукомел. – М. : Энергия, 1980. – 288 с.
5. **Михеев М. А.** Основы теплопередачи / М. А. Михеев, И. М. Михеева. – М. : Энергия, 1977. – 344 с.
6. **Юдаев Б. Н.** Теплопередача : учеб. для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 1981. – 319 с.
7. **Волков Е. А.** Численные методы : учеб. пособие / Е. А. Волков – М. : Наука, 1982. – 256 с.
8. **Демидович Б. П.** Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М. : Наука, 1970. – 583 с.
9. **Копченова Н. В.** Вычислительная математика в примерах и задачах / Н. В. Копченова, И. А. Марон. – М. : Наука, 1972. – 368 с.
10. **Рыбальченко Г. Н.** Численные методы решения задач строительства на ЭВМ : учеб. пособие / Г. Н. Рыбальченко. – К. : УМК ВО, 1989. – 148 с.
11. **Васильев А. Н.** Научные вычисления в Microsoft Excel / А. Н. Васильев. – М. : Вильямс, 2004. – 512 с.
12. **Ларсен Р.** Инженерные расчеты в Excel / Р. Ларсен. – М. : Вильямс, 2002. – 544 с.