УДК 621.001.2

А.А. ХРУЦКИЙ*, канд. техн. наук, доц., Криворожский национальный университет,
О.А. ХРУЦКАЯ, магистр, Мюнхенский технический университет, Германия

МЕТОД МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ПРОЕКТНЫХ ЗАДАЧ ПРИ СОЗДАНИИ ГОРНЫХ МАШИН

Цель. Существующие методы многокритериальной оптимизации затруднительно использовать в задачах при разнонаправленной оптимизации с неявно заданными целевыми функциями или аргументами, заданными в качественной форме. Целью данной статьи является разработка метода многокритериальной оптимизации с расширенной областью применения для использования в практической инженерной деятельности.

Методы. Метод предполагает на первом этапе построение таблиц значений целевых функций на основе аргументов с учетом общей области допустимых значений аргументов и с учетом ограничений. Каждая такая таблица содержит столбцы значений аргументов и столбец значений функции. Далее проводится сортировка таблиц по значениям целевых функций в соответствии с типом экстремума каждой из них (в порядке убывания при поиске максимума или в порядке возрастания при поиске минимума).

Из таблиц значений в пределах интервала поиска определяются совпадающие наборы аргументов. Если найдены совпадающие наборы аргументов во всех таблицах, то процесс оптимизации прекращается. Если совпадающих наборов аргументов в текущем интервале поиска не найдено, то его размер увеличивается на единицу и поиск начинается с начала.

Научная новизна. Предложен метод многокритериальной разнонаправленной условной оптимизации для неявно заданных унимодальных и не унимодальных целевых функций не учитывающий информацию о предпочтениях, проводящий поиск компромиссного решения в центральной части фронта Паретто, определяющий единственное оптимальное решение, наилучшим образом удовлетворяющее всем критериям.

Практическая значимость. Возможность решения проектных разнонаправленных многокритериальных задач оптимизации без явно заданных целевых функций. При этом проектные критерии могут определяться на основе методик расчета и не иметь конкретной функции.

Результаты. Представлен метод условной многокритериальной оптимизации для неявно заданных целевых функций, отличающийся высокой универсальностью. Однако существенным недостатком представленного метода является высокая ресурсоёмкость. Направлением дальнейших исследований является устранение данного недостатка.

Ключевые слова: методы оптимизации, многокритериальная оптимизация, неявно заданные функции, фронт Паретто, поиск компромиссного решения, критерии оптимизации.

Проблема и ее связь с научными и практическими задачами. В практической инженерной деятельности, как при проектировании, так и при выборе режимов эксплуатации, часто встречаются задачи, заключающиеся в поиске лучшего (оптимального) решения при наличии различных несводимых друг к другу критериев оптимальности. Например, при поиске оптимальной конструкции детали, конструктор пытается максимизировать запас прочности и минимизировать массу. Очевидно, этого невозможно достичь одновременно, поскольку, чем больше запас прочности, тем массивнее должна быть деталь и тем больше ее масса. Задачи такого типа очень часто встречаются при проектировании, когда в результате расчетов есть несколько вариантов машины, отличающиеся параметрами и необходимо найти лучший вариант. Причем по одним критериям нужно искать максимум, а по другим - минимум.

Характерной особенностью проектных задач является то, что нет явно заданных целевых функций, а есть только методика расчета каких-то критериев, которые необходимо максимизировать или минимизировать. Свести такие критерии к одной функции достаточно затруднительно. Из-за этого изначально неизвестно, что представляет собой такая целевая функция – линейна она или не линейна, унимодальна или не унимодальна. А аргументы могут быть выражены количественно (численно) или качественно. Например, при выборе наилучшей машины по нескольким критериям, марка машины выступает в качестве аргумента, имеющего качественный характер, а различные критерии - в качестве целевых функций.
Анализ исследований и публикаций. Существует большое разнообразие классов задач оптимизации и, соответственно, методов их решения [1-15].

Одними из простейших методов многокритериальной оптимизации являются методы, проводящие поиск компромисного решения в центральной части фронта Паретто и не учитывающие информацию о предпочтениях. Примерами таких методов яаляются метод суммирования, метод глобального критерия, метод нейтрального компромисного решения [5,7,10,11,15].

Однако указанные методы затруднительно использовать в задачах с неявно заданными целевыми функциями или аргументами, заданными в качественной форме, особенно если необходима разнонаправленная оптимизация (когда некоторые критерии должны быть минимизированы, а другие - максимизированы).

Постановка задачи. Разработка метода многокритериальной разнонаправленной условной оптимизации для неявно заданных унимодальных или не унимодальных целевых функций, проводящий поиск компромиссного решения в центральной части фронта Паретто, не учитывающего информацию о предпочтениях, с помощью которого можно найти единственное оптимальное решение, наилучшим образом удовлетворяющее всем критериям.

Изложение материала и результатов. В качестве исходных данных выступает набор проектных параметров, значения которых необходимо найти для получения экстремума всех критериев в процессе решения инженерной задачи оптимизации.

Метод предназначен для поиска середины области компромиссного решения неявно заданных целевых функций в виде таблиц значений.

Характерной особенностью метода является его расширенная область применения. Так, задача оптимизации может быть разнонаправленной - часть целевых функций необходимо максимизировать, а часть - минимизировать. Сами целевые функции могут быть унимодальными (иметь один экстремум в области допустимых решений) или не унимодальными (иметь несколько экстремумов), линейными или нелинейными. Аргументы могут быть выражены количественно (численно) или качественно.

Например, при выборе наилучшей машины по нескольким критериям, марка машины выступает в качестве аргумента, имеющего качественный характер, а различные критерии - в качестве целевых функций.

Несмотря на то, что основным назначением метода является работа с неявно заданными функциями, он может с успехом применяться и для решения задач оптимизации с явно заданными функциями.

Достоинствами метода являются расширенная область применения и гарантированное отыскание единственного оптимального решения, наилучшим образом удовлетворяющего всем критериям.

Основным недостатком такого метода (как и всех методов на основе перебора) является большие потребляемые вычислительные ресурсы и время оптимизации.

Алгоритм метода

1. Постановка задачи оптимизации. Определение аргументов (проектных параметров) $x_1,x_2,\ldots,x_n$, целевых функций $f_1,f_2,\ldots,f_n$, типа экстремума каждой из них (max/min) и ограничений;

2. Определение области допустимых значений аргументов для каждой из целевых функции на основе ограничений. Определение общей области допустимых значений аргументов.

3. Построение таблиц значений целевых функций на основе аргументов с учетом общей области допустимых значений аргументов с учетом ограничений (рис. 1). Каждая такая таблица содержит несколько столбцов значений, соответствующих аргументам и столбец значений функции.

x_1	x_2	x_n	$f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

x_1	x_2	x_n	$f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

· · ·

x_1	x_2	x_n	$f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

Рис. 1. Таблицы значений целевых функций

4. Сортировка таблиц значений целевых функций в соответствии с типом экстремума каждой из них (в порядке убывания при поиске максимума или в порядке возрастания при поиске минимума) (рис. 2).

max	x_1	x_2	x_n	$f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$
	1,13	809	70	0,0934
	5,86	577	82	0,082
	6,91	575	15	0,0804
	5,29	878	36	0,0793
	1,38	275	68	0,0703
	1,24	812	52	0,0634
	7,83	513	13	0,0611
	0,56	875	44	0,0592
	4,76	782	88	0,0544
	2	619	71	0,0434
	4,69	594	72	0,0334
	1,34	423	26	0,0279
	6,16	897	88	0,0246
min	1,32	415	32	0,0201

max	x_1	x_2	x_n	$f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)$
	5,29	878	36	123
	6,08	691	57	112
	6,51	562	59	110
	7,77	323	41	109
	2,88	396	18	103
	2,35	715	28	98
	0,13	854	12	96
	3,33	231	45	92
	5,5	895	59	90
	4,98	462	64	89
	7,74	435	24	85
	1,47	485	84	83
	0,83	571	15	73
min	5,18	627	85	67

max	x_1	x_2	x_n	$f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)$
	7,57	310	63	23,943
	6,71	281	14	23,932
	4,33	686	30	23,912
	3,07	251	41	23,832
	5,29	878	36	23,81
	1,14	895	32	23,801
	4,37	384	54	23,793
	0,12	417	75	23,754
	8,91	747	73	23,712
	5,41	787	38	23,523
	8,28	895	38	23,511
	5,41	658	53	23,493
	7,96	320	15	23,432
min	8,32	331	10	23,422

Рис. 2. Сортировка таблиц

5. Задается интервал поиска Δ. В начальный момент она равен 1. После каждого цикла его значение увеличивается на 1 до количества строк в таблицах;

6. Интервал поиска всегда начинается сверху таблицы. Из таблиц значений в пределах интервала поиска Δ определяются совпадающие наборы аргументов (рис. 3). Если найдены совпадающие наборы аргументов во всех таблицах, то процесс оптимизации прекращается.

x_1	x_2	x_n	$f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$
1,13	809	70	0,0934
5,86	577	82	0,082
6,91	575	15	0,0804
5,29	878	36	0,0793
1,38	275	68	0,0703
1,24	812	52	0,0634
7,83	513	13	0,0611
0,56	875	44	0,0592
4,76	782	88	0,0544
2	619	71	0,0434
4,69	594	72	0,0334
1,34	423	26	0,0279
6,16	897	88	0,0246
1,32	415	32	0,0201

x_1	x_2	x_n	$f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$
5,29	878	36	123
6,08	691	57	112
6,51	562	59	110
7,77	323	41	109
2,88	396	18	103
2,35	715	28	98
0,13	854	12	96
3,33	231	45	92
5,5	895	59	90
4,98	462	64	89
7,74	435	24	85
1,47	485	84	83
0,83	571	15	73
5,18	627	85	67

x_1	x_2	x_n	$f_m(x_1, x_2, ..., x_n)$
7,57	310	63	23,943
6,71	281	14	23,932
4,33	686	30	23,912
3,07	251	41	23,832
5,29	878	36	23,81
1,14	895	32	23,801
4,37	384	54	23,793
0,12	417	75	23,754
8,91	747	73	23,712
5,41	787	38	23,523
8,28	895	38	23,511
5,41	658	53	23,493
7,96	320	15	23,432
8,32	331	10	23,422

Рис. 3. Поиск оптимума

7. Если совпадающих наборов аргументов в текущем интервале поиска Δ не найдено, то интервал поиска Δ увеличивается на 1 и выполняется переход к п. 6.

8. Если найдено несколько совпадающих наборов аргументов (рис. 4), то предпочесть следует тот, у которого больше аргументов в верхней части таблицы (рис.4, поз. 1).

x_1	x_2	x_n	$f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$
1,13	809	70	0,0934
5,86	577	82	0,082
6,91	575	15	0,0804
5,29	878	36	0,0793
1,38	275	68	0,0703
1,24	812	52	0,0634
7,83	513	13	0,0611
0,56	875	44	0,0592
4,76	782	88	0,0544
2	619	71	0,0434
4,69	594	72	0,0334
1,34	423	26	0,0279
6,16	897	88	0,0246
1,32	415	32	0,0201

x_1	x_2	x_n	$f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$
5,29	878	36	123
6,08	691	57	112
6,51	562	59	110
7,77	323	41	109
2,88	396	18	103
2,35	715	28	98
0,13	854	12	96
3,33	231	45	92
5,5	895	59	90
4,98	462	64	89
7,74	435	24	85
1,47	485	84	83
0,83	571	15	73
5,18	627	85	67

x_1	x_2	x_n	$f_m(x_1, x_2, ..., x_n)$
7,57	310	63	23,943
6,71	281	14	23,932
4,33	686	30	23,912
3,07	251	41	23,832
5,29	878	36	23,81
1,14	895	32	23,801
4,37	384	54	23,793
0,12	417	75	23,754
8,91	747	73	23,712
5,41	787	38	23,523
8,28	895	38	23,511
5,41	658	53	23,493
7,96	320	15	23,432
8,32	331	10	23,422

Рис. 4. Наборы оптимальных значений: *1* - предпочтительное решение задачи; *2* - менее оптимальное решение

Рассмотрим работу предложенного метода на нескольких характерных примерах.

Пример 1. Рассмотрим многокритериальную задачу оптимизации двух явно заданных одномерных унимодальных целевых функций.

$$\begin{cases} f_1(x) = 20 + (2 - 0,5 \cdot x)^2 \to \min; \\ f_2(x) = 10 - (4 - 0,5 \cdot x)^2 \to \max. \end{cases}$$

Ограничения

$$0 \le x \le 10$$

Из графика (рис 5*а*) видно, что задача не имеет идеального решения - минимум функции f_1 не совпадает с максимумом функции f_2.

Экстремумы функций находятся в следующих точках

$$\begin{cases} x_{f_1 \min} = 4; \\ x_{f_2 \max} = 8. \end{cases}$$

Определим множество оптимальных решений Паретто. Для этого построим график зависимости одной функции от другой (рис 5*б*). На графике обозначим точки экстремума для одной и другой целевых функций. Часть графика между этими точками (1) и будет множеством оптимальных решений Паретто в которой необходимо искать компромиссное решение, т.е. одного конкретного решения задача не имеет. Применим предложенный метод оптимизации для того чтобы определить компромиссное значение $x_к$, которое удовлетворяет условиям поставленной задачи.

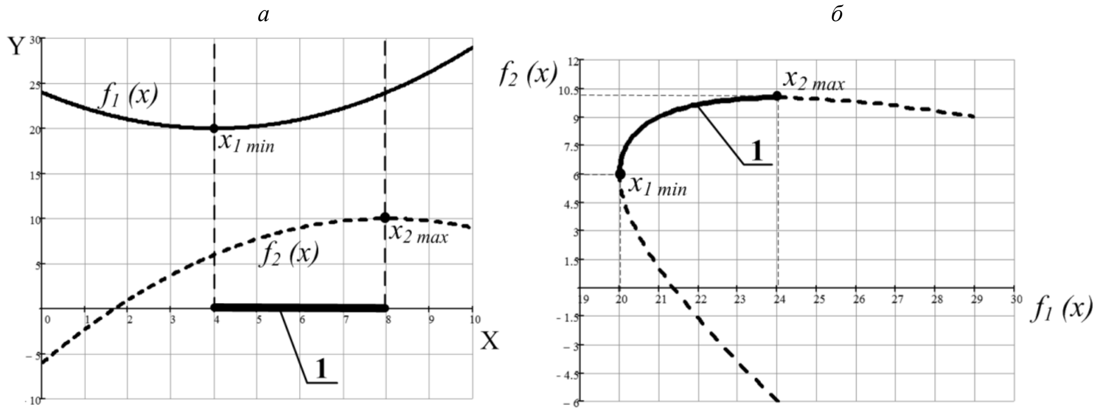

Рис. 5. Многокритериальная задача оптимизации: *а* - графическое представление задачи; *б* - множество Паретто: *1* – множество оптимальных решений

Согласно поставленной задаче оптимизации имеются два разнонаправленных критерия и один аргумент, который имеет следующую область определения $0 \le x \le 10$. Общая область допустимых значений аргумента совпадает с областью допустимых значений аргументов для каждой целевой функции. Каждая таблица значений целевых функций с учетом общей области допустимых значений аргументов и с учетом ограничений содержат по одному столбцу значений аргумента и одному столбцу значений функции. Значение шага дискретизации, которое определяет точность решения принято равным 0,01. Первая таблица сортируется по возрастанию, поскольку ищется минимум, вторая - по убыванию, поскольку ищется максимум. В результате получено значение x=6, f_1=21; f_2=9 при Δ=2. Очевидно, что полученное решение совпадает с серединой области Парето (рис. 5*б*).

Пример 2. Рассмотрим известную многокритериальную задачу выбора оптимальной марки автомобиля по трем критериям (табл. 1) [3].

Таблица 1

Параметры автомобилей

Критерий (целевая функция)	Аргумент (x)			
	VW Golf	Opel Astra	Ford Focus	Toyota Corolla
Цена, 1000 Euro (f_1)	16,2	14,9	14,0	15,2
Расход топлива на 100 км, л (f_2)	7,2	7,0	7,5	8,2
Мощность, кВт (f_3)	66,0	62,0	55	71

В такой задаче нет явно заданных целевых функций. Аргумент (марки машин) является качественным. При этом необходимо выбрать автомобиль, который был бы достаточно мощным, с небольшим расходом топлива и стоил недорого.

Условие задачи оптимизации выглядит следующим образом:

f_1 (цена) $\rightarrow$ min;

f_2 (расход топлива на 100 км) $\rightarrow$ min;

f_3 (мощность) $\rightarrow$ max.

Ограничения

$x \in$(VW Golf, Opel Astra, Ford Focus, Toyota Corolla).

Предварительно проанализируем эту задачу с помощью критерия Парето. На рис. 6 приведены точки, соответствующие маркам автомобилей. Из графика следует, что однозначного решения задачи нет. Автомобили марки Opel (рис. 6, поз. 2) и Ford (рис. 6, поз. 3) является Парето-оптимальным решением.

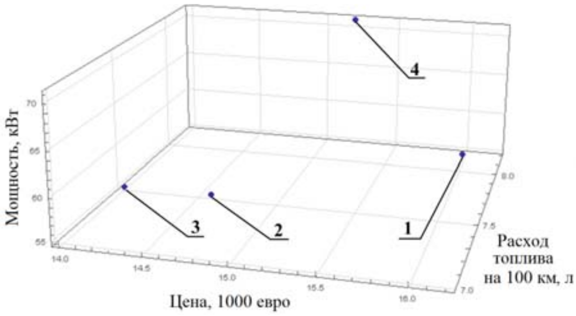

Рис. 6. Графическое представление параметров автомобилей: *1* – VW Golf; *2* – Opel Astra; *3* - Ford Focus; *4* - Toyota Corolla

Применим предложенный метод для решения этой задачи. Составим таблицы значений целевых функций, и отсортируем их (табл. 2). В результате работы предложенного метода многокритериальной оптимизации определен оптимальный автомобиль, которым оказался Opel Astra. Интервал поиска Δ=3.

Таблица 2

Результат работы метода

	f_1 (цена) → min		f_2 (расход топлива на 100 км) → min		f_3 (мощность) → max	
	Ford Focus	14,0	Opel Astra	7,0	Toyota Corolla	71
Δ	Opel Astra	14,9	VW Golf	7,2	VW Golf	66,0
	Toyota Corolla	15,2	Ford Focus	7,5	Opel Astra	62,0
	VW Golf	16,2	Toyota Corolla	8,2	Ford Focus	55

Приведенные примеры демонстрируют универсальность и простоту реализации разработанного метода многокритериальной оптимизации.

Выводы и направления дальнейших исследований. Таким образом, представлен метод условной многокритериальной оптимизации для неявно заданных целевых функций, отличающийся тем, что способен найти единственное оптимальное решение наилучшим образом удовлетворяющее всем критериям и учитывающий весовые коэффициенты этих критериев.
Метод может быть использован для оптимизации унимодальных или не унимодальных целевых функций и отличается высокой универсальностью. Однако существенным недостатком представленного метода является высокая ресурсоемкость. Направлением дальнейших исследований является устранение данного недостатка.

Список литературы

1. **Блауг М.** Экономическая теория благосостояния Парето/ **М.Блауг** // Экономическая мысль в ретроспективе = Economic Theory in Retrospect. - М.: Дело, 1994. - С. 540-561;.
2. **Кини Р.Л., Райфа Х**. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / **Р.Л. Кини, Х. Райфа**.- М: Радио и связь, 1981. - 560 с.;
3. Лекция 15. Многокритериальная оптимизация Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук URL: http://www.math.nsc.ru/LBRT/k5/OR-MMF/lec15.pdf;
4. **Микони С.В.** Системный анализ методов многокритериальной оптимизации на конечном множестве альтернатив / **С.В.Микони** // Труды СПИИРАН.- 2015.- Вып. 4(41).-С.180-199;
5. **Ногин В. Д.** Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход / В.Д. Ногин. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.- 176 с.;
6. **Петросян Л. А.** Теория игр / **Л.А. Петросян , Н.А. Зенкевич, Е.В. Шевкопляс**.- СПб: БХВ-Петербург, 2012.- 432 с.;
7. **Подиновский В. В.** Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / **В.В. Подиновский, В.Д. Ногин**. - М.: Наука, 1982.-262 с.;
8. **Посицельская Л. Н.** Равновесие и Парето-оптимальность в шумной дуэли дискретного типа с ненулевой суммой / **Л. Н. Посицельская** // Фундамент. и прикл. матем., 2002.-т.8.-№4.-с.1111-1128;
9. **Посицельская Л. Н.** Равновесие и оптимальность по Парето в шумных дискретных дуэлях с произвольным количеством действий / **Л. Н. Посицельская** // Фундамент. и прикл. матем., 2007.-т.13.-№2.-с.147-155;
10. **Просанов, И.Ю.** Математические модели в теории управления и исследование операций: учебное пособие / И.Ю. Просанов. – Хабаровск: ДВГУПС, 2007. - 214с.;
11. **Растригин Л.А.** Адаптивные методы многокритериальной оптимизации / **Л.А. Растригин, Я.Ю. Эйдук** // Автоматика и телемеханика, 1985.- № 1.- С. 5-26;
12. **Censor Y**., Pareto Optimality in Multiobjective Problemsю.- **Appl. Math. Optimiz**., 1977.-Vol. 4.- pp 41-59,
13. **Ehrgott M. and Gandibleux X**. «Approximative Solution Methods for Multiobjective Combinatorial Optimization». TOP (Sociedad de Estadística e Investigación Operativa) 12 (1).Matthias Ehrgott. Multicriteria Optimization. — Springer, 2004;
14. **Matthias Ehrgott**. Multicriteria Optimization.- Springer, 2005.- 268 p.;
15. **Wierzbicki A.P.** Reference point approaches // Multicriteria Decision Making: Advances in MCDM Models, Algorithms, Theory and Applications / **Gal T., Stewart T.J., Hanne T**. (Eds.). Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999. P. 9.1-9.39.

Рукопис поступила в редакцію 17.03.17